ƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN
Nguyễn Huy Hoàng (Chủ biên)

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP
TOÁN CAO CẤP
CHO CÁC NHÀ KINH TẾ
(Phần i: Đại số tuyến tính)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

LỜI NÓI ĐẦU

Tiếp theo cuốn bài tập *"Toán cao cấp cho các nhà kinh tế"*, do Nhà xuất bản Thống kê ấn hành năm 2005, lần này chúng tôi cho biên soạn cuốn "Hướng dẫn giải bài tập Toán cao cấp cho các nhà kinh tế".

Mục đích của cuốn sách nhằm giúp cho sinh viên có thể tự học tốt môn học, hoặc dùng để ôn tập thi hết học phần, thi tuyển sinh đầu vào Sau đại học.

Kết cấu cuốn sách gồm hai phần chính tương ứng với nội dung của giáo trình lý thuyết và cuốn bài tập. Trong mỗi bài học, chúng tôi tóm tắt lại các khái niệm và kết quả cơ bản cùng các ví dụ mẫu. Hướng dẫn phương pháp giải các loại bài tập cụ thể, cuối cùng là các bài tập và đáp số hoặc gợi ý để các bạn tự rèn luyện.

Hy vọng cuốn sách sẽ giúp các bạn tự học và ôn tập tốt môn học *"Toán cao cấp cho các nhà kinh tế"*.

Lần đầu biên soạn, cuốn sách không tránh khỏi thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc và đồng nghiệp để lần xuất bản sau được hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến góp ý xin gửi về: Bộ môn Toán cơ bản, Khoa Toán Kinh tế, Trường Đại học Kinh tế Quốc dân.

ĐT/Fax: (04) 6283007.

Email: hoangtoancb@neu.edu.vn

Xin chân thành cảm ơn!

Trưởng Bộ môn Toán Cơ bản, ĐH KTQD.

NGUYỄN HUY HOÀNG

Phần 1

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tái bản lần thứ 3

(Có sửa chữa bổ sung)

Chương 1

KHÔNG GIAN VECTƠ

§1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

A. Tóm tắt lý thuyết và các ví dụ mẫu

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát gồm m phương trình và n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Hệ tam giác:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ở đó, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$ và $a_{ij} = 0$ với $i > j$.

Hệ dạng tam giác có nghiệm duy nhất.

Cách giải: Từ phương trình cuối cùng giải được ẩn x_n, thay ngược lên các phương trình trên tìm các ẩn còn lại, nghiệm của hệ phương trình là duy nhất.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 7 \\ \qquad\qquad 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Giải. Lần lượt tìm giá trị của ẩn x_3, x_2, x_1. Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$$\left(x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = \frac{29}{5}, x_3 = \frac{2}{5}\right).$$

Hệ hình thang:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ở đó, $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1,2,\dots,m; m < n$ và $a_{ij} = 0$ với $i > j$.

Cách giải:

+ Chọn $x_1, x_2, \dots, x_m$ là các ẩn chính (số ẩn chính bằng số phương trình); $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ là ẩn tự do.

+ Chuyển các ẩn tự do sang vế phải và gán cho chúng những giá trị tuỳ ý:

$$x_{m+1} = \alpha_{m+1}, x_{m+2} = \alpha_{m+2}, \dots, x_n = \alpha_n.$$

Khi đó, ta thu được hệ mới có dạng tam giác với các ẩn chính, giải hệ này ta được:

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_m = \alpha_m.$$

Vậy ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho có dạng:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n).$$

Vì các giá trị mà ta gán cho các ẩn tự do là tuỳ ý nên hệ hình thang có vô số nghiệm .

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Giải: Chọn x_1, x_2, x_3 là các ẩn chính; x_4 là ẩn tự do, $x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 - \alpha \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = -2 + 2\alpha \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 3 + \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -8\alpha + 8 \\ x_2 = \frac{1}{2}(\alpha+3) + 2\alpha - 2 \\ x_3 = \frac{1}{2}(\alpha+3) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -8(\alpha-1) \\ x_2 = \frac{1}{2}(5\alpha-1) \\ x_3 = \frac{1}{2}(\alpha+1) \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát: $\left(-8(\alpha-1), \frac{1}{2}(5\alpha-1), \frac{1}{2}(\alpha+1), \alpha\right)$.

Phương pháp khử ẩn liên tiếp

Các phép biến đổi tương đương đối với hệ phương trình tuyến tính:

- Đổi chỗ hai phương trình trong hệ cho nhau;
- Nhân hai vế của một phương trình trong hệ với một số khác không;
- Cộng vào hai vế của một phương trình hai vế tương ứng của một phương trình khác sau khi đã nhân với một số.

Bây giờ chúng tôi xin giới thiệu phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

Nội dung:

Chuyển hệ phương trình tuyến tính tổng quát về hệ tam giác hoặc hệ hình thang, bằng các phép biến đổi tương đương đối với hệ phương trình tuyến tính.

Chú ý:

Để giải hệ phương trình tuyến tính ta thường biến đổi trên ma trận mở rộng tương ứng của hệ phương trình đó.

Cách giải: Tương ứng với hệ phương trình tuyến tính tổng quát ta có ma trận mở rộng và không mất tính tổng quát giả sử $a_{11} \neq 0$.

Bước 1: Khử ẩn x_1 bằng cách lấy dòng một nhân với $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ và cộng vào dòng $i, i = 2,3,\dots,m$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

Bước 2: Khử ẩn x_2 (giả sử $a'_{22} \neq 0$) bằng cách lấy dòng hai nhân với $-\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$ rồi cộng vào dòng $i, i = 3,4,\dots,m$.

Cứ tiếp tục quá trình trên ta đưa được hệ phương trình đã cho về hệ tam giác hoặc hệ hình thang.

Trong quá trình sử dụng các phép biến đổi tương đương nếu thấy trong hệ phương trình xuất hiện phương trình dạng:

- $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b \neq 0$ thì kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm;
- $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$ thì có thể bỏ phương trình này.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad -7y + 7z = 0 \\ \qquad\quad 0z = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad -y - 3z = -11 \\ \qquad 10z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1,2,3)$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 10 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 10 & -5 \\ -2 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\0 & 7 & 2 & -1\\0 & 7 & 3 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\0 & 7 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\\ \quad\quad 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\\ \quad\quad\quad\quad x_3 + x_4 = 0\end{cases}$$

Chọn x_1, x_2, x_3 là các ẩn chính; x_4 là ẩn tự do, gán cho $x_4 = \alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Hệ phương trình trên tương đương với hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 - 2x_3 = -\alpha\\ \quad 7x_2 + 2x_3 = \alpha\\ \quad\quad x_3 = -\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1 = -\alpha - 2\alpha - \frac{6}{7}\alpha\\ x_2 = \frac{3}{7}\alpha\\ x_3 = -\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1 = -\frac{27}{7}\alpha\\ x_2 = \frac{3}{7}\alpha\\ x_3 = -\alpha\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(-\frac{27}{7}\alpha, \frac{3}{7}\alpha, -\alpha, \alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Chú ý: Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình ít hơn số ẩn đều có vô số nghiệm (có nghiệm không tầm thường).

B. Bài tập

I. Đề bài

Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss:

1. $\begin{cases}2x + 3y = 5\\ 3x - y = -9\\ x + 2y = 4\end{cases}$

2. $\begin{cases}x - 2y = 3\\ 2x - y = 1\\ 3x - 3y = 5\end{cases}$

3. $\begin{cases} 8x - y = 10 \\ 10x - 9z = 19 \\ y - 10z = 8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 6y + 8z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 18 \\ 2x + 4y - 3z = 26 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 5y - 4z = 2 \\ 3x - 4y + 10z = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x - 5y - 4z = -8 \\ -2x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_4 + x_1 = 29 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_1 = 8 \\ x_4 + x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 7 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -4 \end{cases}$