ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

Nguyễn Thị Dung

KHÔNG GIAN TÔ PÔ SẮP THỨ TỰ BỘ PHẬN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-

Nguyễn Thị Dung

KHÔNG GIAN TÔ PÔ SẮP THỨ TỰ BỘ PHẬN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: TOÁN HỌC ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. HOÀNG VĂN HÙNG

Thái Nguyên - 2013

Lời nói đầu

Các không gian tô pô sắp thứ tự bộ phận nói chung, không gian metric, định chuẩn sắp thứ tự bộ phận nói riêng được bắt đầu nghiên cứu từ những năm 30 của thế kỷ trước, sau khi các nhà toán học phát hiện ra rằng tất cả các không gian Banach cổ điển như các không gian $L^p, l^p(1 \leq p \leq +\infty)$, c_0, $C(\Omega)$,... đều có một thứ tự bộ phận tự nhiên và các thứ tự này có liên hệ chặt chẽ với tô pô của các không gian được xét. Từ đó nảy sinh một hướng nghiên cứu là nghiên cứu các dàn Banach mà đi đầu là các nhà toán học thuộc trường phái Leningrad (Liên xô cũ) và các nhà toán học Pháp, Mỹ, Nhật, Israel. Nghiên cứu các không gian tô pô có một thứ tự bộ phận liên kết phát hiện ra nhiều tính chất hơn là xét các không gian này như các không gian tô pô hoặc các không gian được sắp thứ tự bộ phận tách biệt. Các nhà toán học hàng đầu thế giới như L.Kantorovich, S.Kakutani, J.Lindenstrauss, M.Stone... đã ứng dụng thành công các kết quả nghiên cứu trong lĩnh vực không gian tô pô sắp thứ tự bộ phận vào lý thuyết biểu diễn các toán tử, biểu diễn các không gian cũng như các lĩnh vực ứng dụng của toán học như điều khiển kinh tế và lý thuyết trò chơi. Các nghiên cứu gần đây về lý thuyết điểm bất động trong các không gian metric sắp thứ tự bộ phận cũng thu được nhiều kết quả và được ứng dụng vào lý thuyết các phương trình vi phân và đạo hàm riêng. Bản luận văn "**Không gian tô pô sắp thứ tự bộ phận và ứng dụng**" nằm trong hướng nghiên cứu nói trên. Nội dung của bản luận văn gồm:

- Lời nói đầu.

- Chương 1. Không gian Tô pô và các tập được sắp thứ tự: Nêu các định nghĩa cơ bản về không gian tô pô và các tập được sắp thứ tự bộ phận. Chứng minh một số mệnh đề liên hệ các khái niệm trù mật tô pô và trù mật thứ tự. Nêu khái niệm hàm tiện ích, nêu phác thảo chứng minh hai định lý của Debreu về sự tồn tại các biểu diễn tiện ích liên tục trong các không gian tô pô tựa được sắp đầy đủ, khả ly tô pô và liên thông cũng như trong các không gian tô pô tựa được sắp đầy đủ thoả mãn tiên đề thứ hai về tính đếm được, nếu các tô pô được xét là các tô pô tự nhiên sinh bởi tựa thứ tự đầy đủ. Các chứng minh này suy ra từ một định lý của Peleg (1970). Tư liệu của chương này chủ yếu được lấy từ công trình [1] của Ghanshyam Mehta.

- **Chương 2. Không gian Metric và sắp thứ tự bộ phận; Các định lý điểm bất động dạng Caristi và Geraghty trong không gian Metric sắp thứ tự bộ phận và ứng dụng:** Xét các định lý điểm bất động trong các không gian metric sắp thứ tự bộ phận, bao gồm định lý Caristi và các mở rộng, định lý Geraghty và các mở rộng. Các kết quả của chương 2 được ứng dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của một bài toán biên trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Tác giả đã trình bày lại phát biểu cũng như chứng minh của các định lý trên theo sự lĩnh hội của bản thân, đồng thời cũng đưa ra một chứng minh khác của kết quả chính trong bài báo [5] của các tác giả M.E. Gordji, M.Ramezani, Y.J. Cho, S. Pirbavata.

- **Kết luận.**

- **Tài liệu tham khảo.**

Tác giả chân thành cám ơn thầy hướng dẫn TS. Hoàng Văn Hùng, Viện Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam vì đã tận tình hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình chuẩn bị luận văn. Tác giả cũng xin chân thành cám ơn các thày cô thuộc Khoa Toán – Tin Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên vì đã quan tâm và tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành chương trình học tập cao học của trường.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2013
Tác giả

Nguyễn Thị Dung

Mục lục

Chương 1

Không gian Tô pô và các tập được sắp thứ tự

Chương này liệt kê các khái niệm và sự kiện cơ bản về không gian tô pô, các tập được sắp thứ tự cũng như không gian tô pô được sắp thứ tự bộ phận. Tác giả chỉ đưa ra chứng minh của các sự kiện quan trọng nhất trong lý thuyết các không gian tô pô và các tập được sắp thứ tự. Các sự kiện khác chỉ được nêu ra nhằm đảm bảo tính hệ thống của lý thuyết không kèm theo chứng minh.

1.1 Không gian Tô pô

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một tập nào đó. Một tô pô trên X là một lớp τ các tập con của X có các tính chất sau:

1) X thuộc τ và $\emptyset$ thuộc τ

2) Hợp của một họ tuỳ ý các tập thuộc τ là thuộc τ và giao của một họ hữu hạn các tập thuộc τ là thuộc τ.

Một tập X cùng với một tô pô τ trên X (tức là một cặp (X, τ)) gọi là một không gian tô pô. Mỗi tập thuộc τ gọi là một tập mở (khi cần chính xác ta sẽ gọi một tập thuộc τ là τ -mở).

Nếu τ và σ là hai tô pô trên cùng một tập nền X và $\sigma \subset \tau$ thì ta nói τ mịn hơn σ hay σ thô hơn τ.

Ví dụ:

- Lớp tất cả các tập con của một tập X cho trước rõ ràng thoả mãn hai tính chất 1) và 2) của định nghĩa 1.1.1, do đó lớp này là một tô pô trên X. Tô pô này mịn hơn mọi tô pô trên X. Nó gọi là tô pô rời rạc. Mọi tập con của X đều là mở trong tô pô rời rạc của X.

- Nếu X đã cho thì họ gồm hai phần tử $\tau = \{\emptyset, X\}$ là một tô pô trên X. Tô pô này thô hơn mọi tô pô trên X và gọi là tô pô tầm thường.

- Tập các tập mở trong một không gian metric tuỳ ý là một tô pô trên X. Do đó các không gian metric là các trường hợp riêng của không gian tô pô. Khi đề cập đến tô pô của một không gian metric (X, d) ta luôn xem tô pô đó là tô pô gồm tất cả các tập mở của X sinh bởi metric d.

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử (X, τ) là một không gian tô pô và F là một tập con của X. Khi đó tập F gọi là đóng trong X nếu $X \backslash F$ là tập mở. Vậy tập đóng là các tập con của X mà phần bù của nó là mở.

Các tập đóng có tính chất:

1') X và $\emptyset$ là đóng.

2') Giao của một họ tuỳ ý các tập đóng là đóng. Hợp hữu hạn của các tập đóng là đóng.

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử (X, τ) là một không gian tô pô và x là một phần tử của X (ta sẽ gọi các phần tử của X là các điểm của nó). Một tập mở của X chứa x gọi là một lân cận của x. Một điểm z của X gọi là một điểm dính của tập con $A \subset X$ nếu mọi lân cận của z chứa ít nhất một điểm của A. Điểm y của X gọi là một điểm giới hạn của A nếu trong mọi lân cận của y tìm được ít nhất một điểm x của A sao cho x khác y. Tập tất cả các điểm dính của tập con A của X gọi là bao đóng của A, ký hiệu $\overline{A}$.

Ta có:

i) A đóng $\leftrightarrow \overline{\mathrm{A}} = A$.

ii) $\overline{A}$ là tập đóng bé nhất của X chứa A.

iii) B mở $\leftrightarrow B$ là lân cận của mọi $x \in B \leftrightarrow \forall x \in B, \exists$ tập mở $V_x \subset B$ sao cho $x \in V_x$.

Định nghĩa 1.1.4. Tập con A của không gian tô pô (X, τ) được gọi là trù mật trong tập con B của X nếu $\overline{A} \supset B$. Nếu X có một tập con A không quá đếm được trù mật trong X thì không gian tô pô (X, τ) gọi là khả ly.

Ví dụ: Không gian metric $\mathbf{R}$ với metric sinh bởi trị tuyệt đối là không gian khả ly. Khi đề cập đến không gian $\mathbf{R}$ như một không gian tô pô với tô pô sinh bởi metric trị tuyệt đối ta sẽ nói là không gian $\mathbf{R}$ được trang bị tô pô thông thường.

1.2 Cơ sở của một tô pô. Các tiên đề về tính đếm được

Định nghĩa 1.2.1. Cho (X, τ) là một không gian tô pô. Tập con $\mathcal{B}$ của τ được gọi là một cơ sở của tô pô τ nếu mọi tập mở trong tô pô τ biểu diễn được dưới dạng hợp (hữu hạn hoặc vô hạn) của các tập thuộc $\mathcal{B}$.

Ví dụ: Tập các hình cầu mở (với tâm tại một điểm tuỳ ý và bán kính tuỳ ý) trong một không gian metric X là một cơ sở của tô pô gồm tất cả các tập mở trong X.

Một cơ sở $\mathcal{B}$ của tô pô τ trên tập X có các tính chất sau:

1) $\forall x \in X, \exists G \in \mathcal{B} : x \in G$.

2) Nếu x được chứa trong giao của hai tập G_1, G_2 thuộc $\mathcal{B}$ thì tồn tại tập G thuộc $\mathcal{B}$ sao cho $x \in G \subset G_1 \cap G_2$.

Ngược lại mọi họ $\mathcal{B}$ các tập con của một tập X có hai tính chất nêu trên đều là một cơ sở của tô pô τ gồm tất cả các tập con của X biểu diễn được dưới dạng hợp của một họ con nào đó của $\mathcal{B}$. Tô pô này gọi là tô pô sinh bởi $\mathcal{B}$. Nếu $\mathcal{A}$ là họ các tập con của X có tính chất hợp của các tập thuộc $\mathcal{A}$ bằng X thì tập $\mathcal{B}$ các tập con của X nhận được từ các tập của $\mathcal{A}$ bởi một số hữu hạn các phép giao thoả mãn cả hai tính chất 1), 2). Do đó $\mathcal{A}$ được gọi là một tiền cơ sở của tô pô sinh bởi $\mathcal{B}$.

Định nghĩa 1.2.2. Không gian tô pô (X, τ) gọi là thoả mãn tiên đề thứ hai về tính đếm được nếu tô pô τ có một cơ sở $\mathcal{B}$ không quá đếm được.

Nhận xét: Mọi không gian tô pô thoả mãn tiên đề thứ hai về tính đếm được đều khả ly.
Đối với không gian metric ta có:

Mệnh đề 1.2.1. Nếu không gian metric (X, d)khả ly thì không gian tô pô X với tô pô là các tập mở trong X thoả mãn tiên đề thứ hai về tính đếm được.

Chứng minh. Giả sử $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ là một tập không quá đếm được trù mật trong X. Gọi $\mathcal{B}$ là tập tất cả các hình cầu mở $B(x_n; 1/m)$ có tâm tại các điểm x_n của A và bán kính $1/m$ (m là số nguyên dương, m và n biến thiên độc lập). Rõ ràng $\mathcal{B}$ là tập đếm được. Giả sử G là một tập mở của X và x là một điểm tuỳ ý của G . Gọi $r = 1/m$ (m là số nguyên dương) là số sao cho hình cầu mở $B(x; 2r)$nằm trong G . Vì A trù mật trong X nên tồn tại một điểm x_j nào đó của A thuộc hình cầu mở $B(x; r) \subset B(x; 2r) \subset G$. Rõ ràng khi đó $x \in B(x_j; r)$. Hình cầu mở $B(x_j; r)$ nằm trong G, bởi vì từ bất đẳng thức tam giác đối với metric trên X ta suy ra $B(x_j; r) \subset B(x; 2r)$. Như vậy, với mọi x thuộc G tồn tại một hình cầu mở $B(x_j; r)$ thuộc họ $\mathcal{B}$ sao cho $x \in B(x_j; r) \subset G$. Theo tiên đề chọn, tồn tại một ánh xạ đơn trị $f : G \to \mathcal{B}$ sao cho $x \in f(x) \subset G$ với mọi $x \in G$. Từ đó ta có: $G \subset \bigcup\limits_{x \in G} f(x) \subset G$.

Vậy $G = \bigcup\limits_{x \in G} f(x)$. Vì mỗi $f(x)$ là một phần tử của $\mathcal{B}$ nên ta suy ra $\mathcal{B}$ là một cơ sở của tô pô gồm tất cả các tập mở của X. □

Định nghĩa 1.2.3. Cho không gian tô pô (X, τ). Một họ $\mathcal{U}$ các lân cận của điểm $x \in X$ được gọi là một cơ sở lân cận của x nếu với mọi lân cận G của x đều tìm được một phần tử U của họ $\mathcal{U}$ sao cho $U \subset G$.

Không gian tô pô (X, τ) gọi là thoả mãn tiên đề thứ nhất về tính đếm được nếu mọi điểm $x \in X$ đều có một cơ sở lân cận đếm được.

Mệnh đề 1.2.2. Mọi không gian metric đều thoả mãn tiên đề thứ nhất về tính đếm được.

Chứng minh. Nếu x là một điểm của không gian metric X thì họ lân cận của x gồm các hình cầu mở $B(x; 1/n)$ (n là số nguyên dương) lập thành một cơ sở lân cận đếm được của x. □

Định nghĩa 1.2.4. Cho không gian tô pô (X, τ). Họ các tập con $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ của X gọi là một phủ của X nếu $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha = X$. Nếu mọi U_α đều mở thì phủ $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ gọi là một phủ mở của X.

Mệnh đề 1.2.3. Nếu (X, τ) là không gian tô pô thoả mãn tiên đề thứ hai về tính đếm được thì từ mọi phủ mở của X đều có thể trích ra một phủ con không quá đếm được.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{B} = (G_n)$ là một cơ sở đếm được của tô pô τ gồm các tập mở (G_n) và $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một phủ của X. Với mỗi $x \in X$ tồn tại một tập mở U_α của phủ $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ sao cho $x \in U_\alpha$. Vì $\mathcal{B}$ là một cơ sở của tô pô τ thì tồn tại tập mở $G_{n(x)}$ sao cho $x \in G_{n(x)} \subset U_\alpha$ (*). Rõ ràng họ $\big(G_{n(x)}\big)$ là họ con của $\mathcal{B}$ nên họ này không quá đếm được. Với mỗi tập $G_{n(x)}$ có thể có nhiều tập U_α thoả mãn (*) nhưng theo tiên đề chọn, tồn tại ánh xạ đơn trị f từ họ$\big(G_{n(x)}\big)$ vào phủ $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ thoả mãn x $\in G_{n(x)} \subset U_\alpha = f(G_{n(x)})$ với mọi x thuộc X. Rõ ràng họ $\big(f(G_{n(x)})\big)$ là một phủ con không quá đếm được của phủ $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ bởi vì $X \subset \bigcup\limits_{x\in X} f(G_{n(x)})$. □

Định nghĩa 1.2.5. Không gian tô pô (X, τ) gọi là liên thông nếu ngoài tập $\emptyset$ và X trong X không còn tập con nào khác có tính chất vừa mở vừa đóng.

Ví dụ: Đường thẳng thực **R** với tô pô thông thường là liên thông.

Mệnh đề 1.2.4.Nếu (X, τ) là một không gian tô pô và Y là một tập con của X thì họ τ_Y gồm tất cả các tập dạng $G \cap Y$, trong đó G là một tập mở tuỳ ý thuộc họ τ, là một tô pô trên Y.

Định nghĩa 1.2.6. Không gian tô pô (Y, τ_Y) gọi là không gian con của không gian tô pô (X, τ).

Mệnh đề 1.2.5. Các khoảng của đường thẳng thực **R** với tô pô thông thường là các không gian con liên thông của **R** và ngược lại, mọi không gian con liên thông của **R** phải là một trong các khoảng dạng $(a; b), [a; b), (a; b], [a; b]$ (a có thể bằng $-\infty$, b có thể bằng $+\infty$).

1.3 Các tiên đề về tính tách được

Định nghĩa 1.3.1. Không gian tô pô X được gọi là thoả mãn tiên đề thứ nhất về tính tách được hay T_1- không gian nếu với hai điểm phân biệt bất kỳ x, y của X tồn tại một lân cận U_x của x không chứa y và một lân cận U_y của y không chứa x.

Mệnh đề 1.3.1. Không gian tô pô X là T_1- không gian khi và chỉ khi mọi tập gồm chỉ một điểm là đóng.