ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU HÀ

HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI CỰC LOGARIT TẠI VÔ CÙNG VÀ ĐỊNH LÝ XẤP XỈ CỦA SICIAK

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU HÀ

HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI CỰC LOGARIT TẠI VÔ CÙNG VÀ ĐỊNH LÝ XẤP XỈ CỦA SICIAK

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu tham khảo trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Hà

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Phạm Hiến Bằng, nhân dịp này cho phép tôi được gửi lời cám ơn chân thành tới thầy cùng những kinh nghiệm quý báu mà thầy đã tạo điều kiện trong quá trình tôi hoàn thành bản luận văn này.

Xin cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Trường Đại học Công nghệ Giao thông Vận tải cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Hà

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Hàm Green đa phức đóng một vai trò rất quan trọng trong lý thuyết thế vị phức, nó đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu như: Siciak, Zaharjuta, Lelong, Klimek, Zeriahi, Dan Coman, Magnusson,... và đạt được nhiều kết quả sâu sắc về hàm Green đa phức và xấp xỉ các hàm chỉnh hình. Đó là sự tổng quát hoá kết quả của Siciak- Zaharjuta trong £ ¥ và trong trường hợp đại số. Một số kết quả về hàm Green đa phức với cực logarit trên đa tạp siêu lồi, đó là sự tổng quát hoá của hàm Green đa phức với cực hữu hạn, đã được nghiên cứu bởi Lelong, Klimek, Demailly, Zaharjuta, E. Amar , P.J. Thomas, Dan Coman...

Ở đây chúng tôi chọn đề tài *"Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng và định lý xấp xỉ của Siciak"*.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả trong việc nghiên cứu về hàm Green đa phức với cực tại vô cùng và định lý xấp xỉ của Siciak.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại. Một số kết quả về đa thức, tính thuần nhất và tập cân.

- Trình bày một số kết quả của Benedikt Steinar Magnusson năm 2007 về hàm Green đa phức với cực tại vô cùng và định lý xấp xỉ của Siciak.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

- Sử dụng các kết quả của Benedikt Steinar Magnusson.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 43 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận, danh mục tài liệu tham khảo và phần phụ lục.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối. Cuối chương này trình bày một số kết quả về đa thức, tính thuần nhất và tập cân.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu về hàm Green đa phức với cực tại vô cùng và định lý xấp xỉ của Siciak.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hòa dưới

1.1.1. Định nghĩa. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u:\Omega\to[-\infty,\infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông nào của* Ω. *Hàm* u *được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi* $a\in\Omega$ *và* $b\in\mathbb{C}^n$, *hàm* $\lambda\mapsto u(a+\lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc trùng* $-\infty$ *trên mỗi thành phần của tập hợp* $\{\lambda\in\mathbb{C}: a+\lambda b\in\Omega\}$. *Trong trường hợp này, ta viết* $u\in PSH(\Omega)$. (*ở đây* $PSH(\Omega)$ *là lớp hàm đa điều hoà dưới trong* Ω).

1.1.2. Định lý. *Cho* $u:\Omega\to[-\infty,\infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông của* $\Omega\subset\mathbb{C}^n$. *Khi đó* $u\in PSH(\Omega)$ *khi và chỉ khi với mỗi* $a\in\Omega$ *và* $b\in\mathbb{C}^n$ *sao cho*

$$\{a+\lambda b:\lambda\in\mathbb{C},|\lambda|\le 1\}\subset\Omega,$$

ta có
$$u(a)\le l(u;a,b),$$

trong đó
$$l(u;a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+e^{it}b)dt$$

Ngoài ra, tính đa điều hoà dưới là một tính chất địa phương.

Một số tính chất quan trọng của những hàm đa điều hoà dưới có thể được suy ra từ kết quả tiếp theo. Tương tự như trường hợp của những hàm điều hoà dưới, ta gọi nó là *định lý xấp xỉ chính cho những hàm đa điều hoà dưới.*

1.1.3. Định lý. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u\in PSH(\Omega)$. *Nếu* $\varepsilon>0$ *sao cho* $\Omega_\varepsilon\neq\emptyset$, *thì* $u*\lambda_\varepsilon\subset C^\infty\cap PSH(\Omega_\varepsilon)$. *Hơn nữa,* $u*\lambda_\varepsilon$ *đơn điệu giảm khi* ε *giảm, và* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u*\lambda_\varepsilon(z)=u(z)$ *với mỗi* $z\in\Omega$.

Phép chứng minh giống như chứng minh của định lý xấp xỉ chính cho các hàm điều hoà dưới. Trước tiên ta cần bổ đề sau:

1.1.4. Bổ đề. *Cho* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là một tập mở và* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Giả thiết rằng* $a \in \Omega,\ b \in \mathbb{C}^n$, *và* $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1\} \subset \Omega$. *Khi đó*

$$(l(u;.,b) * \chi_\varepsilon)(a) = l(u * \lambda_\varepsilon; a,b)$$

Chứng minh. Vế trái của đẳng thức bằng

$$\int_{\mathbb{C}^n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{it}b - w)dt \right) \chi_\varepsilon(w) d\lambda(w).$$

Do định lý Fubini, nó bằng vế phải của đẳng thức trên.

Bây giờ chúng ta có thể chứng minh định lý.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 2.5.2 (i) [3], $u * \lambda_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Ta có $u * \lambda_\varepsilon \in PSH(\Omega_\varepsilon)$. Sử dụng lập luận đó như trong Bổ đề 2.5.3 [3], đối với mỗi biến riêng, chúng ta có thể chứng minh (bằng qui nạp theo j) ước lượng sau :

$$u * \lambda_{\varepsilon_1} \ge \int_{C^{n-1}} I(w_1,\ldots,w_{j-1},w_{j+1},\ldots,w_n) d\lambda(w_1,\ldots,w_{j-1},w_{j+1},\ldots,w_n),$$

Trong đó $I(w_1,\ldots,w_{j-1},w_{j+1},\ldots,w_n) =$

$$\int_C u(z_1 + \varepsilon_2 w_1,\ldots,z_j + \varepsilon_2 w_j, z_{j+1} + \varepsilon_1 w_{j+1},\ldots,z_n + \varepsilon_1 w_n)\chi(w) d\lambda(w_j),$$

$0 \le \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ và $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \Omega_{\varepsilon_1}$.

Từ đó $$(u * \lambda_{\varepsilon_1})(z) \ge (u * \lambda_{\varepsilon_2})(z) \ge u(z).$$

Phần còn lại của chứng minh cũng như trong Định lý 2.5.5 [3].

Bây giờ chúng ta sẽ trình bày vài hệ quả của định lý xấp xỉ chính.

1.1.5. Hệ quả. *Cho* Ω *và* Ω' *là những tập mở trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $\mathbb{C}^k$, *tương ứng. Nếu* $u \in PSH(\Omega)$ *và* $f : \Omega' \to \Omega$ *là một ánh xạ chỉnh hình, thì* $u \circ f$ *là đa điều hoà dưới trong* Ω'.

Chứng minh. Nếu u và $-u$ là đa điều hoà dưới, thì $u \in C^2(\Omega)$. Bởi vậy $\langle Lu(a)b,b\rangle = 0$ với mọi a,b thích hợp, và như vậy $u \in PH(\Omega)$. Điều ngược lại là tầm thường.

Vì hàm đa điều hoà dưới là điều hoà dưới nên ta có thể phát biểu vài tính chất khác:

1.1.6. Hệ quả. *Nếu $u,v \in PSH(\Omega)$ và $u = v$ hầu khắp nơi trong Ω, thì $u \equiv v$.*

1.1.7. Hệ quả. *Hàm đa điều hoà dưới thoả mãn nguyên lý cực trị trong miền bị chặn, tức là nếu Ω là một tập con mở liên thông bị chặn của $\mathbb{C}^n$ và $u \in PSH(\Omega)$, thì hoặc u là hằng hoặc với mỗi $z \in \Omega$.*

$$u(z) < \sup_{w \in \partial\Omega} \limsup_{\substack{y \to w \\ y \in \Omega}} u(y).$$

1.1.8. Định nghĩa. *Tập hợp $E \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là đa cực nếu với mỗi điểm $a \in E$ đều có một lân cận V của a và một hàm $u \in PSH(V)$ sao cho $E \cap V \subset \{z \in V : u(z) = -\infty\}$.*

Cho Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$. Ta nói rằng một ánh xạ chỉnh hình $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ là không suy biến trong Ω nếu trong mỗi thành phần liên thông của Ω có thể tìm được một điểm z sao cho hạng của $\partial_z f$ là m.

1.1.9. Mệnh đề. *Cho $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến trên một tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ và Ω' là một lân cận mở của $f(\Omega)$ trong $\mathbb{C}^m$. Cho $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset PSH(\Omega')$ sao cho bao trên của nó $u = \sup_{\alpha \in A} u_\alpha$ là bị chặn trên địa phương. Khi đó*

$$(u \circ f)^* = (u^* \circ f).$$

Chứng minh. Đặt $A = \{z \in \Omega : \det \partial_z f = 0\}$.