ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VĂN TUYÊN

LÝ THUYẾT NEVANLINNA CHO ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH VÀ TẬP DUY NHẤT

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên-Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VĂN TUYÊN

LÝ THUYẾT NEVANLINNA CHO ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH VÀ TẬP DUY NHẤT

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên, 2013

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU 2

Chương 1

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI CHO ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH VỚI MỤC TIÊU LÀ SIÊU MẶT 4

1.1. Một số khái niệm 4

1.2. Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình 7

1.3. Quan hệ số khuyết cho đường cong chỉnh hình vào đa tạp tuyến tính 23

Chương 2

XÁC ĐỊNH DUY NHẤT ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH BỞI MỘT HỌ SIÊU MẶT 29

2.1. Một số khái niệm về tập xác định duy nhất 29

2.2. Trường hợp họ siêu mặt ở vị trí tổng quát 35

2.3. Trường hợp họ siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese 39

KẾT LUẬN CỦA LUẬN VĂN 48

TÀI LIỆU THAM KHẢO 49

MỞ ĐẦU

Lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna được đánh giá như là một trong những thành tựu sâu sắc và đẹp đẽ nhất của toán học trong thế kỷ XX. Được hình thành từ những năm đầu của thế kỷ XX, lý thuyết được bắt đầu bằng những công trình của Hadamard, Borel và ngày càng có nhiều ứng dụng trong những lĩnh vực khác nhau của toán học. Trung tâm của lý thuyết là hai định lý cơ bản. Định lý cơ bản thứ nhất, một cách viết khác của công thức Poisson-Jensen, cho thấy quan hệ giữa hàm đặc trưng $T_f(r)$ của hàm phân hình f với hàm đặc trưng $T_f(r,a)$. Định lý cơ bản thứ hai thể hiện những kết quả sâu sắc và đẹp đẽ nhất của lý thuyết, được phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau: quan hệ giữa hàm đặc trưng với các hàm đếm, các hàm đếm bội cắt cụt, hàm xấp xỉ, ….

Cho đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và q siêu phẳng $H_1,\dots,H_q$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Năm 1933, H. Cartan ([9]) đã chứng minh: *với* $\varepsilon > 0$,

$$(q-n-1-\varepsilon)T_f(r)\le\sum_{j=1}^{q}N_f^n(r,H_j)+O(1),$$

đúng với mỗi $r>0$ *đủ lớn, nằm ngoài tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.*

Kết quả này của H. Cartan là một dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ không suy biến tuyến tính kết hợp với các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Công trình này của ông được đánh giá hết sức quan trọng, mở ra một hướng nghiên cứu mới trong việc phát triển lý thuyết phân bố giá trị- nghiên cứu sự phân bố giá trị của các ánh xạ phân chỉnh hình, mà ngày nay gọi là “ **Lý thuyết Nevanlinna-Cartan**”. Các kết quả nghiên cứu của tác giả trong thời gian gần đây tập trung vào hai vấn đề:

1. Xây dựng các dạng Định lý cơ bản thứ hai với mục tiêu là các siêu mặt cố định (hoặc di động), bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng

Nevanlinna-Cartan với các hàm xấp xỉ, hàm đếm hay hàm đếm bội cắt cụt. Từ đó suy ra các kết quả về quan hệ số khuyết.

2. Nghiên cứu các ứng dụng của Lý thuyết Nevanlinna - Cartan trong các vấn đề khác nhau của toán học, đặc biệt là trong nghiên cứu sự xác định duy nhất của ánh xạ phân chỉnh hình….

Với mục đích tìm hiểu về Lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình và nghiên cứu các ứng dụng của nó trong lý thuyết tập duy nhất em đã chọn đề tài: “ **Lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình và tập duy nhất”.** Trong luận văn này em nghiên cứu các vấn đề cơ bản như sau:

1. Trình bày một số dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình kết hợp với các siêu mặt cố định với hai trường hợp $f : £ ® \mathrm{R}^n(£)$ và $f : £ ® X$ với X là đa tạp.

2. Trình bày lại và chứng minh một số điều kiện đại số của tập xác định duy nhất không kể bội cho đường cong chỉnh hình trong trường hợp siêu mặt.

Luận văn được chia thành hai chương cùng với phần Mở đầu, phần Kết luận và danh mục các Tài liệu tham khảo.

Chương 1, luận văn trình bày một số dạng định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình vào không gian xạ ảnh phức. Trong Chương 2, luận văn trình bày một số ứng dụng của Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt trong vấn đề tập xác định duy nhất cho đường cong chỉnh hình phức.

Qua đây, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo TS. Hà Trần Phương, tới các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua. Cảm ơn trường ĐHSP, khoa Toán và các thầy cô giáo đã giảng dạy em trong quá trình em học tập tại trường. Luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của thầy cô và các bạn.

Tác giả

Nguyễn Văn Tuyên

Chương 1
ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI CHO ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH VỚI MỤC TIÊU LÀ SIÊU MẶT

Trong chương này em trình bày một số kết quả nghiên cứu về các dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình vào không gian xạ ảnh phức hoặc đa tạp tuyến tính kết hợp với các siêu mặt. Nội dung của chương này dựa trên bài báo [2], [6] và một số tài liệu khác. Trước hết, em trình bày một số kết quả trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna-Cartan.

1.1 Một số khái niệm

Cho hàm chỉnh hình $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $z_0\in\mathbb{C}$ được gọi là không điểm bội k của hàm f nếu tồn tại một hàm chỉnh hình h không triệt tiêu trong một lân cận U của z_0 sao cho trong lân cận U đó hàm $f(z)$ biểu diễn dưới dạng

$$f(z)=(z-z_0)^k h(z).$$

Nghĩa là $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0$ và $f^{(k)}(z_0)\neq 0$. Với $z\in\mathbb{C}$, ta ký hiệu

$$\mathrm{ord}_f(z)=\begin{cases} k & \text{nếu } z \text{ là không điểm bội } k\\ 0 & \text{nếu } f(z)\neq 0\end{cases}$$

Giả sử f là hàm phân hình, khi đó $f=\dfrac{f_1}{f_2}$, trong đó f_1, f_2 là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung. Số phức z_0 gọi là không điểm bội k của f nếu z_0 là không điểm bội k của f_1, z_0 gọi là cực điểm bội k của f nếu z_0 là không điểm bội k của f_2.

Định nghĩa 1.1. Một ánh xạ chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, hay còn gọi là đường cong chỉnh hình trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được định nghĩa là ánh xạ

$$f = (f_0 : \ldots : f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$
$$z \mapsto (f_0(z) : \ldots : f_n(z)),$$

trong đó $f_j, 0 \le j \le n$, là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$. Nếu $f_j, j = 0,\ldots,n$ là các đa thức thì f gọi là đường cong đại số. Nếu các hàm $f_0,\ldots, f_n$ không có không điểm chung trên $\mathbb{C}$, ta gọi ánh xạ

$$(f_0,\ldots, f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

là một biểu diễn tối giản của f.

Định nghĩa 1.2. Đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là suy biến tuyến tính nếu ảnh của f chứa trong một đa tạp tuyến tính thực sự nào đó của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Đường cong f được gọi là suy biến đại số nếu ảnh của f chứa trong một đa tạp con đại số thực sự nào đó của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Tiếp theo ta định nghĩa hàm đặc trưng, hàm xấp xỉ, hàm đếm của đường cong kết hợp với các siêu mặt cố định. Cho đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và một biểu diễn tối giản $(f_0,\ldots, f_n)$ của f.

Định nghĩa 1.3. Hàm

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\|f(re^{i\theta})\| d\theta$$

được gọi là hàm đặc trưng Nevanlinan-Cartan (hay hàm độ cao Cartan) của f, trong đó

$$\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|,\ldots,|f_n(z)|\}.$$

Giả sử D là siêu mặt (cố định) bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, xác định bởi đa thức thuần nhất Q.

Định nghĩa 1.4. Hàm

$$m_f(r, D) = m_f(r, Q) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|Q(f)(re^{i\theta})|} d\theta$$

được gọi là hàm xấp xỉ của f kết hợp với siêu mặt D.

Ký hiệu $n_f(r,D)$ là số không điểm của $Q\circ f$ trong đĩa $|z|<r$, kể cả bội, $n_f^M(r,D)$ là số các không điểm của $Q\circ f$ trong đĩa $|z|<r$, bội chặn bởi số nguyên dương M. Nghĩa là

$$n_f(r,D)=\sum_{z\in\mathbb{C},|z|<r}\operatorname{ord}_{Q\circ f}(z);$$

$$n_f^M(r,D)=\sum_{z\in\mathbb{C},|z|<r}\min\{M,\operatorname{ord}_{Q\circ f}(z)\}.$$

Ta ký hiệu

$$n_f(0,D)=\operatorname{ord}_{Q\circ f}(0);$$
$$n_f^M(0,D)=\min\{M,\operatorname{ord}_{Q\circ f}(0)\}.$$

Định nghĩa 1.5. Hàm

$$N_f(r,D)=N_f(r,Q):=\int_0^r\frac{n_f(t,D)-n_f(0,D)}{t}dt+n_f(0,D)\log r$$

được gọi là hàm đếm kể cả bội và hàm

$$N_f^M(r,D)=N_f^M(r,Q)=\int_0^r\frac{n_f^M(t,D)-n_f^M(0,D)}{t}dt+n_f^M(0,D)\log r$$

được gọi là hàm đếm bội chặn bởi M của ánh xạ f kết hợp với siêu mặt D. Số M trong ký hiệu $n_f^M(r,D)$ được gọi là chỉ số bội cắt cụt. Trường hợp đặc biệt, nếu $M=1$ ta có thể viết $\overline{n}_f(r,D)$ thay cho $n_f^1(r,D)$ và gọi là hàm đếm không kể bội.

Giả sử $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và D là một siêu mặt bậc trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ xác định bởi đa thức thuần nhất Q.

Định lý 1.1. (Định lý cơ bản thứ nhất, [8]) *Giả sử $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình và D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Nếu $f(\mathbb{C})\not\subset D$ thì với mỗi số thực dương r, ta có*

$$m_f(r,D)+N_f(r,D)=dT_f(r)+O(1),$$

trong đó $O(1)$ là hằng số độc lập với r.

Ký hiệu $(z_0:\ldots:z_n)$ là hệ tọa độ thuần nhất trong trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cho đa tạp đại số xạ ảnh X có số chiều bằng k, $k \le n$ và một họ gồm q siêu mặt $D=\{D_1,\ldots,D_q\}$ trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, trong đó D_j xác định bởi đa thức thuần nhất Q_j trong $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_n]$, $j=0,\ldots,q$. Với số nguyên dương $N \ge k$, ta định nghĩa khái niệm họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát như sau:

Định nghĩa 1.6. Họ D các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi ở vị trí N-tổng quát đối với đa tạp X nếu $q \ge N+1$ và với mọi cách chọn $N+1$ siêu mặt $D_{j_1},\ldots,D_{j_{N+1}}$ trong họ D ta luôn có

$$\{z \in X \mid Q_{j_1}(z)=\ldots=Q_{j_{N+1}}(z)=0\}=\emptyset.$$

Đặc biệt, nếu $N=k$, ta nói D ở vị trí tổng quát đối với X. Nếu $N=k=n$, ta nói họ D ở vị trí tổng quát (đối với $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$).

Nhận xét. Họ các siêu phẳng $\{H_j, j=0,\ldots,q\}$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nếu $q>n$ và $n+1$ siêu phẳng bất kỳ trong chúng đều độc lập tuyến tính.

1.2. Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình

Trước hết em trình bày một số kết quả cần thiết cho việc chứng minh các định lý trong phần này. Cho a là số nguyên dương, ký hiệu V_a là không gian các đa thức thuần nhất bậc a trong $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_n]$.

Bổ đề 1.2. ([1]) *Giả sử* $g_1,\ldots,g_n$ *là các đa thức thuần nhất trong* $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_n]$, *xác định đa tạp con trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *có số chiều bằng 0. Khi đó với mỗi* $a \ge \sum_{j=1}^{n} \deg g_j$,

$$\dim \frac{V_a}{(g_1,\ldots,g_n)\cap V_a} = \deg g_1 \ldots \deg g_n.$$

Ta gọi mỗi bộ m số tự nhiên $(i_1,\dots,i_m)$ là m-bộ các số tự nhiên. Cho hai m-bộ các số tự nhiên $(j_1,\dots,j_m)$ và $(i_1,\dots,i_m)$, ta nói $(j_1,\dots,j_m) > (i_1,\dots,i_m)$ nếu và chỉ nếu tồn tại $b \in \{1,\dots,m\}$ sao cho $j_l = i_l$ với mọi $l < b$ và $j_b > i_b$.

Với định nghĩa trên, chúng ta xây dựng được một quan hệ thứ tự trên N^m, thứ tự đó gọi là thứ tự từ điển của các m-bộ các số tự nhiên. Với một m-bộ $(i) = (i_1,\dots,i_m)$ các số tự nhiên, ký hiệu $s(i) := \sum_{j=1}^{m} i_j$.

Giả sử $g_1,\dots,g_n \in \mathbb{C}[z_0,\dots,z_n]$ là các đa thức thuần nhất bậc d, định nghĩa một đa tạp con trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có số chiều bằng 0, ta xây dựng một lọc của V_a $(a \ge nd)$ dựa trên các đa thức $g_1,\dots,g_n$ như sau: Ký hiệu

$$I_{a,d} = \{(i) = \{i_1,\dots,i_n\} \in \mathbb{N}^n \mid s(i) \le a/d\}$$

đã được sắp thứ tự từ điển. Với mỗi $(i) \in I_{a,d}$, gọi $S_{(i)} = S_{a,(i)}$ là không gian con của V_a được định nghĩa bởi

$$S_{(i)} = \sum_{(e)\in I_{a,d},\,(e)\ge(i)} g_1^{e_1}\dots g_n^{e_n} V_{a-ds(e)}.$$

Khi đó $S_{(0)} = V_a$, $S_{(i')} \subset S_{(i)}$ nếu $(i') > (i)$. Như vậy $\{S_{(i)} \mid (i \in I_{a,d})\}$ cho ta một lọc của V_a. Bổ đề sau đây sẽ cho ta tính chất của hai không gian thương liên tiếp trong lọc.

Bổ đề 1.3. ([2],[8]) *Giả sử $(i') > (i)$ là hai phần tử liên tiếp theo thứ tự từ điển trong $I_{a,d}$. Khi đó tồn tại đẳng cấu*

$$\frac{S_{(i)}}{S_{(i')}} \cong \frac{V_{a-ds(i)}}{(g_1,\dots,g_n)\cap V_{a-ds(i)}}.$$

Ngoài ra ta có thể chọn được một cơ sở của $\frac{S_{(i)}}{S_{(i')}}$ từ tập hợp tất cả các lớp tương đương có dạng $g_1^{i_1}\dots g_n^{i_m}h$ modulo $S_{(i')}$, trong đó h là một đơn thức bậc $a - ds(i)$ của các biến $z_0,\dots,z_n$.

Chứng minh. Trước tiên ta xây dựng đồng cấu f giữa các không gian véc tơ