ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Phạm Đình Phước

QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của GS.TS Trần Vũ Thiệu (Viện Toán học Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin cảm ơn quý thầy, cô giảng dạy lớp cao học khóa 5 (2011 - 2013) đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 01 năm 2013.

Người viết Luận văn

Phạm Đình Phước

Mở đầu

Qui hoạch tuyến tính (Linear Programming) là bài toán tối ưu đơn giản nhất. Đó là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm tuyến tính với các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính. Qui hoạch tuyến tính có nhiều ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết và thực tiễn. Phương pháp đơn hình (do G. B. Dantzig đề xuất năm 1947) là phương pháp quen thuộc, có hiệu quả để giải bài toán qui hoạch tuyến tính và các bài toán đưa được về qui hoạch tuyến tính.

Mô hình toán học của bài toán qui hoạch tuyến tính như sau:

Tìm các biến số $x_j = (1, 2, \ldots, n)$ sao cho:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min$$

với điều kiện

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, i = (1, 2, \ldots, m)$$
$$x_j \geq 0, j = (1, 2, \ldots, n)$$

trong đó a_{ij}, b_i, và c_j là các hằng số cho trước (m, n nguyên dương).

Có thể giải thích ý nghĩa thực tiễn của bài toán qui hoạch tuyến tính như sau: Có n phương thức sản xuất, ký hiệu j = 1, ... , n. Phương thức sản xuất j hoạt động ở cường độ đơn vị sẽ cho ra a_{ij} đơn vị sản phẩm i (i = 1, ... , m) và tốn một chi phí là c_j. Giả thiết số các sản phẩm làm ra và chi phí tỉ lệ thuận với cường độ hoạt động của mỗi phương thức sản xuất (giả thiết tuyến tính). Hỏi cần sử dụng những phương thức sản xuất nào và với cường độ bao nhiêu để có thể sản xuất ra được các sản phẩm với số lượng định trước tương ứng là $b_1, \ldots, b_m$, và sao cho tốn ít chi phí nhất?

Khi mô hình hóa các hệ thống sản xuất thực tiễn, ta thường gặp các hệ số đầu vào của một hay nhiều phương thức hoạt động không nhận các giá trị cố định (giống như trong bài toán qui hoạch tuyến tính đã mô tả) mà mỗi cột hệ số thứ j (véctơ $\vec{A}_j = (c_j, a_{1j}, ..., a_{mj})^T$) trong bài toán được lựa chọn một cách tùy ý từ một tập lồi đa diện $D_i \subset \mathbb{R}^n$ cho trước. Lớp bài toán này được gọi là bài toán qui hoạch tuyến tính suy rộng (Generalized Linear Programming)(GLP). Philip Wolfe là người đầu tiên đã nghiên cứu bài toán này (xem [6], trang 267) và bài toán đã được biết đến trong [5] và sau đó trong [3].

Tên gọi của bài toán xuất phát từ nhận xét là bài toán này trở thành bài toán qui hoạch tuyến tính thông thường khi $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ là các véctơ hằng, nghĩa là khi mỗi tập D_j chỉ gồm duy nhất một phần tử. Còn bây giờ là các véctơ biến cần được xác định, vì thế hàm mục tiêu và các ràng buộc trong bài toán (GLP) là ràng buộc song tuyến tính và (GLP) là một bài toán toàn phương không lồi (xem [2], [3]). Tuy nhiên, sự giống nhau giữa hai bài toán này gợi ra ý tưởng xây dựng thuật toán hiệu quả giải bài toán (GLP). Thuật toán ban đầu do Wolfe (xem [6]) đề xuất có thể xem như một sự mở rộng trực tiếp của phương pháp đơn hình cổ điển.

Luận văn này nhằm mục đích tìm hiểu và trình bày các kết quả đã có về bài toán qui hoạch tuyến tính suy rộng, đặc biệt là về phương pháp giải bài toán.

Luận văn gồm lời nói đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 với tiêu đề "Kiến thức cơ sở về qui hoạch tuyến tính" trình bày nội dung và các tính chất cơ bản của bài toán qui hoạch tuyến tính, khái niệm bài toán đối ngẫu và các quan hệ đối ngẫu trong qui hoạch tuyến tính. Phương pháp đơn hình Dantzig giải bài toán qui hoạch tuyến tính được nhắc lại ở chương này, với đầy đủ cơ sở lý luận và ví dụ bằng số để minh họa.

Chương 2 với tiêu đề "Qui hoạch tuyến tính suy rộng" đề cập tới bài toán qui hoạch tuyến tính suy rộng. Giới thiệu mô hình toán học của bài toán và nêu cách đưa bài toán về bài toán quy hoạch tuyến tính suy rộng tương đương, gọi là bài toán chủ, dễ xử lý hơn. Bài toán chủ với số ràng buộc như cũ nhưng có rất nhiều biến. Cột hệ số của các biến này sẽ được tìm dần khi cần, nhờ giải các bài toán phụ trên các tập D_j. Trình bày thuật toán Wolfe giải bài toán qui hoạch tuyến tính suy rộng, thông qua giải các bài toán phụ thu hẹp. Chứng minh tính hữu hạn của phương pháp giải và xây dựng các ví dụ bằng số để minh họa.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quý thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tôi tiếp tục hoàn thiện luận văn này.

Chương 1

Kiến thức cơ sở về qui hoạch tuyến tính

Chương này trình bày tóm tắt một số kiến thức cơ bản cần thiết về qui hoạch tuyến tính, bài toán qui hoạch tuyến tính đối ngẫu, các quan hệ đối ngẫu trong qui hoạch tuyến tính và phương pháp đơn hình giải qui hoạch tuyến tính. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1] và [2].

1.1 Bài toán qui hoạch tuyến tính và tính chất

1.1.1 Nội dung bài toán

Quy hoạch tuyến tính là bài toán tìm cực tiểu hay cực đại của một hàm tuyến tính f(x) trên một khúc lồi $\mathbb{R}^n$ được xác định bởi một hệ phương trình hay bất phương trình tuyến tính cho trước.

Bài toán này có dạng: tìm các biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = 1, \dots, m_1, & (1.1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2, & (1.2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = m_1 + m_2 + 1, \dots, m, & (1.3) \\ x_j \ge 0, j = 1, \dots, n_1, x_j \le 0, j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 \le n, & (1.4) \end{cases}$$

và hàm số $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ đạt cực tiểu. Ở đây a_{ij}, b_i, c_j là các hằng số cho trước.

Trong bài toán trên, f gọi là hàm mục tiêu, mỗi hệ thức ở (1.1), (1.4) gọi là một ràng buộc. Mỗi ràng buộc (1.1), (1.3) gọi là một ràng buộc chính (dạng đẳng thức hay bất đẳng thức), mỗi ràng buộc $x_j \ge 0$ hay $x_j \le 0$ là một ràng buộc về dấu.

Điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán gọi là một điểm chấp nhận được hay một phương án. Tập hợp tất cả các phương án, ký hiệu là D, gọi là miền ràng buộc hay miền chấp nhận được. Một phương án đạt cực tiểu của hàm mục tiêu gọi là một phương án tối ưu hay một lời giải của bài toán đã cho.

Bài toán có ít nhất một phương án tối ưu gọi là bài toán có lời giải. Bài toán không có phương án (miền ràng buộc rỗng $D = \varnothing$) có phương án nhưng không có phương án tối ưu, do hàm mục tiêu giảm vô hạn (bài toán tìm min) hoặc tăng vô hạn (bài toán max), gọi là bài toàn không có lời giải.

- Dạng chuẩn tắc:

$$min \left\{ f(x) = c^T x : Ax \ge b, x \ge 0 \right\},$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (ma trận cấp $m \times n$), $b \in \mathbb{R}^n_+$. Trong bài toán tập ràng buộc $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \ge b, x \ge 0\}$ là một tập lồi đa diện.

- Dạng chính tắc:

$$max \left\{ f(x) = c^T x : Ax = b, x \ge 0 \right\},$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (ma trận cấp $m \times n$), $b \in \mathbb{R}^n_+$. Trong bài toán tập ràng buộc $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ là một tập lồi đa diện.

Trong các bài toán trên f(x) được gọi là hàm mục tiêu. Mỗi bất phương trình $(Ax)_i \geq b_i$ hay phương trình $(Ax)_i = b_i$ gọi là một ràng buộc chính, $x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$, gọi là các ràng buộc không âm hay ràng buộc về dấu. Véctơ (điểm) $x \in D$ gọi là một phương án hay lời giải chấp nhận được của bài toán. Một phương án đạt cực tiểu của hàm mục tiêu f(x) gọi là một phương án tối ưu hay lời giải tối ưu của bài toán.

1.1.2 Các tính chất

Định lý sau nêu điều kiện để một qui hoạch tuyến tính có lời giải tối ưu.

Định lý 1.1. *Nếu một qui hoạch tuyến tính có lời giải chấp nhận được và hàm mục tiêu bị chặn dưới trên tập ràng buộc (đối với bài toán min) thì qui hoạch đó chắc chắn có lời giải tối ưu.*

Định lý 1.2. *Nếu x^0 là một phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng bất kỳ và nếu x^1, x^2 $(x^1 \neq x^2)$ là hai phương án thỏa mãn $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2,\ 0 < \lambda < 1$ thì x^1, x^2 cũng là các phương án tối ưu của bài toán.*

Định nghĩa 1.3. *Một lời giải chấp nhận được $x \in D$ mà đồng thời là đỉnh của D gọi là một phương án cực biên hay một lời giải cơ sở, nghĩa là x không thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi của bất kỳ hai phương án (lời giải chấp nhận được) khác của D.*

Định lý sau nêu một tính chất đặc trưng cho phương án cực biên (lời giải cơ sở) của bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc với giả thiết $m \leq n$ và rank(A) = m.

Định lý 1.4. *Để một lời giải chấp nhận được $\bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ của qui hoạch tuyến tính chính tắc là lời giải cơ sở thì cần và đủ là các véctơ*