ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LƯU ĐÌNH TRUNG

VẤN ĐỀ DUY NHẤT ĐỐI VỚI ĐƠN THỨC SAI PHÂN CỦA HÀM PHÂN HÌNH P-ADIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LƯU ĐÌNH TRUNG

VẤN ĐỀ DUY NHẤT ĐỐI VỚI ĐƠN THỨC SAI PHÂN CỦA HÀM PHÂN HÌNH P-ADIC

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên - Năm 2013

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành tại Khoa Sau Đại học, Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của Tiến sĩ Vũ Hoài An. Nhân dịp này, tôi xin cảm ơn Tiến sĩ Vũ Hoài An, người đã hướng dẫn giúp đỡ tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến các nhà toán học của Khoa Toán, Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học Việt Nam.
Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong và xin được cảm ơn ý kiến đóng góp của các nhà khoa học và bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 03 năm 2013
Tác giả
Lưu Đình Trung

Mục lục

Các kí hiệu

- $\mathbb{C}_p$: Trường số phức p-adic
- f : Hàm phân hình p-adic
- $N_f(a, r)$: Hàm đếm của f tại a
- $m_f(\infty, r)$: Hàm xấp xỉ của f
- $T_f(r)$: Hàm đặc trưng của f
- $E_f(S)$: Ảnh ngược tính cả bội của tập S đối với f

MỞ ĐẦU

Lý thuyết phân bố giá trị do Nevanlinna xây dựng được xem là thành tựu toán học đẹp đẽ nhất của toán học thế kỷ XX, mà ngày nay được gọi là Lý thuyết Nevanlinna. Nội dung chính của Lý thuyết phân bố giá trị là hai Định lý cơ bản. Định lý cơ bản thứ nhất là mở rộng Định lý cơ bản của đại số, mô tả sự phân bố đều giá trị của hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Định lý cơ bản thứ hai là mở rộng Định lý Picard, mô tả ảnh hưởng của đạo hàm đến sự phân bố giá trị của hàm phân hình. Hà Huy Khoái là người đầu tiên xây dựng tương tự Lý thuyết phân bố giá trị cho trường hợp p-adic. Ông và các học trò đã tương tự lý thuyết Nevanlinna cho trường số phức p-adic mà ngày nay thường gọi là lý thuyết Nevanlinna p-adic. Họ đã đưa ra hai Định lý chính cho hàm phân hình và ánh xạ chỉnh hình p-adic. Một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị (phức và p-adic) là Vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng (phức và p-adic) qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm mà ngày nay được gọi là Định lý 5 điểm của Nevanlinna (hoặc tương tự của Định lý 5 điểm cho trường hợp p-adic).

Vấn đề xác định duy nhất được nghiên cứu liên tục và mạnh mẽ với kết quả của H.Fujimoto, M.Shirosaki, M.Ru, H.X.Yi, P.C.Hu-C.C.Yang, Hà Huy Khoái, I.Lahiri, G.Dethloff, Đỗ ĐứcThái, A. Escassut, Phạm Việt Đức, Hà Trần Phương, Vũ Hoài An,...

Năm 1977, F.Gross đưa ra một ý tưởng mới là không xét ảnh ngược của các điểm riêng rẽ mà xét ảnh ngược của các tập hợp điểm trong $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$. Ông đưa ra hai câu hỏi sau:

i) Tồn tại hay không tập S của $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ để với bất kỳ các hàm phân hình khác hằng f, g thỏa mãn điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ ta có $f \equiv g$?
ii) Tồn tại hay không hai tập S_i, $i = 1, 2$, của $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ để với bất kỳ các hàm phân hình khác hằng f, g thỏa mãn điều kiện $E_f(S_i) = E_g(S_i)$, $i = 1, 2$, ta có $f \equiv g$?
Các công trình sâu sắc của F.Gross và C.C.Yang, H.X.Yi, P.Li, E. Mues-M.Reinders , H.Fujimoto, M.Shirosaki, M.Ru, P.C.Hu-C.C.Yang, Hà Huy Khoái, A. Escassut, Vũ Hoài An, Tạ Thị Hoài An, T.T.H.An- J.T.-Y.Wang-P.-M.Wong .... góp phần trả lời câu hỏi của F.Gross.
Phân bố giá trị và vấn đề xác định duy nhất đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đạo hàm của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1967, Hayman đã chứng minh kết quả sau đây:
Định lí A.[4] Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Nếu $f(z) \neq 0$ và $f^{(k)}(z) \neq 1$ với k là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$, thì f là hằng.
Năm 1967, Hayman cũng đưa ra giả thuyết sau đây:
Giả thuyết Hayman.[4] Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn $f^n(z) f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$, thì f là hằng.
Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và $n > 1$, đã được Clunie kiểm tra đối với $n \geq 1$. Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành nhánh nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman.
Tiếp đó, đối với các hàm nguyên f và g, C. C. Yang và G. G. Gundersen đã nghiên cứu trường hợp ở đó $f^{(k)}$ và $g^{(k)}$ nhận giá trị 0 CM, $k = 0, 1$.
Công trình quan trọng đầu tiên thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về C.C.Yang – X.H. Hua. Năm 1997, hai ông đã chứng minh định lý sau đây:
Định lí B.[13] Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng, $n \geq 11$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C}$ - $\{0\}$. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ nhận giá trị a CM thì hoặc$f = dg$ với $d^{n+1} = 1$ hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}$ và $g(z) = c_2 e^{-cz}$, ở đó c, c_1, c_2 là các hằng số và thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$.
Từ đó, hướng nghiên cứu trên phát triển mạnh mẽ với những kết quả sâu

sắc của I. Lahiri, Q. Han – H. X. Yi, W. Bergweiler, J. K. Langley, K. Liu, L. Z. Yang, L. C. Hong, M. L. Fang, B. Q. Li, P. C. Hu - C.C.Yang, A. Eremenko, G. Frank - X. Hua – R. Vaillancourt .... Công cụ sử dụng ở đó là một số kiểu Định lí chính thứ hai cho đa thức vi phân cùng với với các ước lượng giữa hàm đặc trưng, hàm đếm của hàm và đạo hàm.

Trong trường hợp p-adic, kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về J. Ojeda. Năm 2008, J. Ojeda đã xét vấn đề nhận giá trị của $f^{'} + Tf^n$ với T là hàm hữu tỷ. Ở đó, J. Ojeda đã nhận được kết quả sau:

Định lí C.[11] Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, $n \geq 2$ là một số nguyên và $a \in C_p$ - $\{0\}$. Khi đó nếu $f^n(z) f^{'}(z) \neq a$ với mọi $z \in \mathbb{C}_p$ thì f là hằng.

Năm 2011, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An đã thiết lập các kết quả tương tự cho đơn thức vi phân dạng $f^n(z)\left(f^{(k)}(z)\right)^m$. Họ đã nhận được kết quả sau:

Định lí D.[4] Cho m, n, k là các số nguyên, f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, $a \in \mathbb{C}_p$ - $\{0\}$ thỏa mãn điều kiện $f^n(z)(f^{(k)})^m(z) \neq a$ với mọi $z \in \mathbb{C}_p$. Khi đó f là đa thức bậc $< k$ nếu một trong các điều kiện sau xảy ra:

i. f là một hàm nguyên.

ii. $k > 0$ và hoặc $m = 1, n > \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ hoặc $m > 1, n \geq 1$.

Năm 2012, Hà Huy Khoái - Vũ Hoài An - Nguyễn Xuân Lai [7] đã xét vấn đề duy nhất khi $(f^n)^{(k)}, (g^n)^{(k)}$ cùng nhận một giá trị.

Gần đây,K. Boussaf-A.Ecassut-J.Ojeda đã bắt đầu nghiên cứu các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$: $f^{'}P^{'}(f)$, $g^{'}P^{'}(f)$ nhận một hàm nhỏ.

Trong những năm gần đây,vấn đề trên được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đa thức sai phân của đa thức sai phân của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Năm 2006,Halburd và Korhonen đã thiết lập tương tự của lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân của hàm phân hình có bậc hữu hạn. Năm 2007, I.Laine và C.C.Yang [10] đã thiết lập tương tự **Định lý A** của Hayman cho một kiểu đa thức sai phân đặc biệt của hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn.Hai ông đã chứng minh kết quả sau đây:

Định lý E.[10] Cho f là hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn trên $\mathbb{C}$ và c

là một số phức khác 0, n là một số nguyên, $n \geq 2$. Khi đó $f^n(z)f(z+c)$ nhận a, $a \in \mathbb{C}$, vô hạn lần.

Năm 2009,K. Liu và L.Z.Yang đã tương tự **Định lý D**(xem [5]) cho Toán tử sai phân của hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn, đã tương tự **Định lý B**(xem[5]) cho một kiểu đa thức sai phân đặc biệt của hàm phân hình. Cho f là hàm phân hình $p-dic$. Toán tử sai phân của f được xác định như sau: $\Delta_c f$=$f(z+c)$-$f(z)$, $\Delta_c^1 f$=$\Delta_c f$,...,$\Delta_c^{n+1} f$=$\Delta_c^n(f(z+c)-f(z))$, $n=1,2,...$, ở đó $c \in \mathbb{C}_p$ là một hằng số khác 0.

Đa thức sai phân của f được xác định như sau:

$A(z,f) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{I}} a_\lambda(z) f^{\lambda_0} f^{\lambda_1}(z+c)...f^{\lambda_n}(z+nc)$, với

$c \in \mathbb{C}_p, c \neq 0, n \in \mathbb{N}^*, a_\lambda(z) = o(T_f(r))$.

Đơn thức sai phân của f được xác định như sau:

$M(z,f) = af^n f^{q_1}(z+c)...f^{q_k}(z+kc)$; $a, c_k \in \mathbb{C}_p, a \neq 0, c \neq 0, k \in \mathbb{N}^*$.

Năm 2012, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An đã tương tự **Định lý E, Định lý B** cho Toán tử sai phân,đa thức sai phân của hàm phân hình $p-dic$. Họ đã nhận được kết quả sau:

Cho P là đa thức bậc n trên $\mathbb{C}_p$. Viết $P = a_0(z-a_1)^{m_1}...(z-a_s)^{m_s}$

Định lý F.[5] (Tương tự Giả thuyết Hay man cho hàm phân hình $p-adic$ và Toán tử sai phân của nó)

Giả sử f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, $n, k_i, s, q, i = 1, ...q$, là các số nguyên, $s \geq 1, q \geq 1, k_i \geq 1$, $n \geq \sum\limits_{i=1}^{q}(2k_i+1)2^i + q + s + 1 - 3\sum\limits_{i=1}^{q} k_i$, $\Delta_c^q f$, không đồng nhất bằng 0. Khi đó $P(f)\left(\Delta_c^1 f\right)^{k_1} .... (\Delta_c^q f)^{k_q} - a$ có không điểm,ở đó $a \in \mathbb{C}_p$, $a \neq 0$.

Định lý G.[5] (Tương tự Giả thuyết của Hayman cho hàm phân hình $p-adic$ và đa thức sai phân của nó)

Giả sử f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$,$n, q_i, s, k, i = 1...k$, là các số nguyên,$s \geq 1, q_i \geq 1, k \geq 1, n \geq \sum\limits_{i=1}^{k} q_i + 2k + s + 1$

Khi đó

$P(f)(f(z+c))^{q_1}...(f(z+kc))^{q_k} - a$ có không điểm,ở đó $a \in \mathbb{C}_p$, $a \neq 0$

Định lý H.[5] (Tương tự của **Định lý B** của Yang-Hua cho hàm phân hình $p-adic$ và Đa thức sai phân của nó)

Giả sử f, g là các hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$.

1. Nếu $E_{f^n f(z+c)f(z+kc)}(1) = E_{g^n g(z+c)g(z+kc)}(1), k \geq 1, n \geq 5k+8$ là các số nguyên thì $f = hg$ với $h^{n+k} = 1$ hoặc$fg = l$ với $l^{n+h} = 1$.

2. Nếu $E_{f^n f(z+c)...(f(z+kc))^q k}(1) = E_{g^n g(z+c)...(g(z+kc))^q k}(1)$ $k \geq 1, q_i > 1, i = 1,..,k, n \geq \sum\limits_{i=1}^{k} q_i + 8k + 8$ là các số nguyên thì $f = hg$ với $h^{n+q_1+...+q_k} = 1$ hoặc $fg = l$ với $l^{n+q_1+...+q_k} = 1$.

3.Nếu

$$E_{f^n f(z+e_1c)...f(z+e_mc)(f(z+t_1c))^{q_1}...(f(z+t_kc))^{q_k}}(1) = \\ E_{g^n g(z+e_1c)...g(z+e_mc)(g(z+t_1c))^{q_1}...(g(z+t_kc))^{q_k}}(1).$$

với $e_j \geq 1, j = 1,...,m, t_i \geq 1, q_i > 1, k \geq 1, i = 1,...k, n \geq 5m + \sum\limits_{i=1}^{k} q_i + 8k + 8$ là các số nguyên thì $f = hg$ với $h^{n+m+q_1+...+q_k} = 1$ hoặc $fg = l$ với $l^{n+m+q_1+...+q_k} = 1$.

Theo hướng nghiên cứu này, đề tài nghiên cứu vấn đề:

VẤN ĐỀ DUY NHẤT ĐỐI VỚI ĐƠN THỨC SAI PHÂN CỦA HÀM PHÂN HÌNH P-ADIC.

Đây là một vấn đề có tính thời sự của giải tích p-adic.

Ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo luận văn gồm:

Chương 1. Phân bố giá trị của hàm phân hình p-adic và đường cong chỉnh hình p-adic.

*Chương 2.*Vấn đề duy nhất đối với đơn thức sai phân của hàm phân hình p-adic.