ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

VŨ VĂN DỰ

VỀ HAI BÀI TOÁN TỐI ƯU HAI CẤP

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nghiêm túc của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và kính chúc thầy luôn luôn mạnh khỏe.

Tôi cũng xin cảm ơn các quý thầy, cô giảng dạy tại Đại học Thái Nguyên và tại Viện Toán học đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích không chỉ trong khoa học mà còn cả trong cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn các bạn đồng môn đã giúp đỡ tôi trong thời gian học tập tại Đại học Thái Nguyên và trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, con xin cảm ơn bố mẹ. Nhờ có bố mẹ không quản gian khó, vất vả sớm khuya nhưng vẫn tạo mọi điều kiện tốt nhất để con có được thành quả ngày hôm nay. Xin kính tặng bản luận văn này cho Bố và Mẹ.

Thái Nguyên, tháng 6 - 2013

Người viết Luận văn

Vũ Văn Dự

Mở đầu

Bài toán tối ưu đa mục tiêu và bài toán bất đẳng thức biến phân là hai lớp bài toán được nảy sinh trong quá trình nghiên cứu và giải các bài toán thực tế, như: bài toán kinh tế, vật lý toán, giao thông đô thị, lý thuyết trò chơi... Cả hai lớp bài toán này cũng mới được quan tâm đến trong khoảng 50 năm trở lại đây, do tính ứng dụng rộng rãi của nó trong đời sống kinh tế - xã hội. Tuy nhiên, việc nghiên cứu các bài toán này lại gặp rất nhiều khó khăn, nhiều vấn đề liên quan đến các bài toán này vẫn chưa được giải quyết.

Bài toán tối ưu đa mục tiêu và bài toán bất đẳng thức biến phân có mối quan hệ tương hỗ cho nhau. Nhiều khi việc tìm nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu đa mục tiêu lại quy về việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân có tham số. Cụ thể, trong luận văn này chúng ta sẽ thấy: việc tìm điểm Pareto và Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine lại quy về việc giải bài toán tối ưu với ràng buộc bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số. Trong bản luận văn này, chúng ta sẽ tìm hiểu về bài toán tối ưu trên tập Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine và bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp (viết tắt là BVI - Bilevel Variational Inequalities). Cụ thể:

Đối với bài toán tối ưu trên tập Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine, chúng ta sẽ tìm hiểu các kiến thức cơ bản, như: bài toán tối ưu véc tơ phân thức affine, điểm Pareto (hay nghiệm hữu hiệu), điểm Pareto yếu (hay nghiệm hữu hiệu yếu), định lý về điều kiện cần và đủ của điểm Pareto và Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine. Đồng thời, chúng ta cũng sẽ trình bày một thuật toán nhánh-cận để giải bài toán tối ưu trên tập Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine (còn gọi là Thuật toán LB).

Những nghiên cứu ban đầu về bài toán tối ưu đa mục tiêu lần đầu được giới thiệu từ cuối thế kỷ XIX bởi nhà kinh tế học Vilfredo Federico Damaso Pareto

(1848 - 1923). Tuy nhiên tối ưu đa mục tiêu chỉ được quan tâm và có những bước phát triển đột phá trong khoảng 40 năm trở lại đây. Bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine (viết tắt là bài toán (VP)) là sự mở rộng tự nhiên của bài toán tối ưu véc tơ tuyến tính. Các kết quả nghiên cứu cho thấy rằng tập Pareto của bài toán (VP) khác biệt và phức tạp hơn nhiều so với tập Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính.

Bài toán tối ưu trên tập Pareto và tập Pareto yếu thuộc lớp bài toán tối ưu hai cấp, lớp bài toán này lần đầu được đề xuất năm 1972 và hiện nay đang rất được quan tâm bởi những ứng dụng rộng rãi của nó trong thực tiễn. Bài toán tối ưu trên tập Pareto (hoặc tập Pareto yếu) của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức affine được viết tắt là bài toán (P) (hoặc bài toán (WP)) cũng là một dạng của bài toán tối ưu hai cấp. Trên thực tế, trong hoạt động lao động sản xuất cũng đòi hỏi việc giải các bài toán này. Ví dụ, một công ty sản xuất đồ ăn nhanh có p nhà máy (được đặt tại các địa phương khác nhau), mỗi nhà máy lại sản xuất n loại đồ ăn khác nhau. Hàm lợi nhuận $f(x)$ của công ty phụ thuộc vào phương án sản xuất số lượng sản phẩm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Công ty muốn tìm một phương án sản xuất số lượng sản phẩm x sao cho lợi nhuận thu được là cao nhất. Nhưng để đảm bảo chất lượng sản phẩm lại không làm hại đến môi trường thì công ty phải tìm một phương án sản xuất số lượng sản phẩm x sao cho tỷ số giữa chi phí trong sản xuất của mỗi nhà máy với chi phí của cả công ty là nhỏ nhất. Vì vậy, thay vì tìm hàm cực đại $f(x)$ trên các tập phương án chấp nhận được, công ty phải thực hiện bài toán cực đại hàm $f(x)$ trên tập hữu hiệu của bài toán (VP). Tức là, tìm phương án sản xuất số lượng sản phẩm x sao cho thu được lợi nhuận cao nhất trên các tập phương án sản xuất thỏa mãn yêu cầu tiết kiệm chi phí trong sản xuất những vẫn đảm bảo môi trường.

Việc nghiên cứu bài toán (P) và bài toán (WP) gặp rất nhiều khó khăn, bởi vì tập nghiệm của bài toán (VP) thường không lồi, không còn là hợp của các mặt đa diện ràng buộc và có cấu trúc phức tạp.

Đối với bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp được xét trong bản luận văn này sẽ lần lượt tìm hiểu về: bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, các điều kiện tồn tại nghiệm cơ bản của bất đẳng thức biến phân đơn điệu. Đồng thời, chúng ta cũng sẽ trình bày một bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu; và cũng tìm hiểu về một thuật toán sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia Armijo có kết hợp phương pháp của đạo hàm tăng cường và kỹ thuật cắt siêu phẳng để giải bài toán hai cấp đã nói ở trên.

Bài toán bất đẳng thức biến phân được giới thiệu lần đầu bởi Hartman và Stampacchia năm 1966. Những nghiên cứu đầu tiên về bài toán này liên quan đến việc giải bài toán điều khiển tối ưu và bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Chúng ta phải kể đến sự đóng góp của các nhà toán học, như: D. Kinderlehrer, Stampacchia, S. Facchinei, J. Pang... đã có những công trình nghiên cứu công phu liên quan đến bất đẳng thức biến phân và các ứng dụng của nó. Ở Việt Nam, cũng có nhiều nhà nghiên cứu theo đuổi lĩnh vực này, như: Lê Dũng Mưu, Phạm Quốc Khánh, Nguyễn Đông Yên, ... đã có những nghiên cứu chuyên sâu về bất đẳng thức biến phân và xây dựng phương pháp giải cho các bài toán bất đẳng thức biến phân.

Những năm gần đây bài toán bất đẳng thức biến phân đã có những bước phát triển mạnh mẽ và thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu bởi tính ứng dụng rộng rãi của nó. Một trong các hướng nghiên cứu quan trọng là xây dựng phương pháp giải. Công cụ được cho là hữu hiệu hơn cả là phương pháp dựa vào việc tính điểm bất động. Tuy nhiên, nếu gặp phải bài toán bất đẳng thức biến phân có tham số thì việc giải quyết nó lại không hề dễ dàng vì phải sử dụng đến các kỹ thuật của tối ưu toàn cục. Ngay trong bản luận văn này, chúng ta gặp phải trường hợp tương tự khi phải tìm điểm Pareto và Pareto yếu của bài toán (VP), ta đã đưa về việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân có tham số. Điều này thật sự khó khăn.

Bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp được xét trong bản luận văn này là một trường hợp đặc biệt của bài toán bất đẳng thức biến phân có tham số. Bài toán được xây dựng bởi một bài toán tối ưu trên tập nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân (điều này sẽ được trình bày rõ ràng hơn trong Mục 2.2, Chương 2). Ta cũng lưu ý rằng trong các phương pháp hiệu chỉnh như hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề, nếu bài toán bất đẳng thức biến phân là đơn điệu thì các bài toán con cần giải quyết cũng là đơn điệu, nhưng nếu bài toán bất đẳng thức biến phân là giả đơn điệu thì các bài toán con cần giải quyết lại không kế thừa được tính đơn điệu. Vấn đề được đặt ra là: Xây dựng thuật toán để giải bài toán BVI với ràng buộc là một bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu trên tập nghiệm của nó. Vấn đề này đã dẫn tới việc xây dựng thuật toán trong ([4]). Thuật toán này có thể được coi là sự kết hợp của phương pháp đạo hàm tăng cường bằng cách sử dụng các nguyên tắc của bài toán phụ với kỹ thuật cắt siêu phẳng.

Mục đích của luận văn này là trình bày về hai bài toán tối ưu hai cấp: bài toán tối ưu trên tập Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine và bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp cùng các thuật toán có liên quan để giải hai bài toán này. Qua luận văn, ta có thể thấy được cách tiếp cận bất đẳng thức biến phân đối với bài toán tối ưu trên tập Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức affine.

Luận văn có 2 chương:

Chương 1. Trình bày về bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức affine (bài toán (VP)), bài toán tối ưu trên tập Pareto của bài toán (VP)(gọi là bài toán (P)), bài toán tối ưu trên tập Pareto yếu của bài toán (VP)(gọi là bài toán (WP)). Cuối cùng, trình bày về phương pháp giải bài toán (WP) bằng phương pháp tính cận đối ngẫu Lagrange.

Chương 2. Trình bày về bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, sự tồn tại và duy nhất nghiệm của nó. Trình bày về bài toán (BVI) và thuật toán để giải quyết nó. Cuối cùng trình bày một định lý để khẳng định sự hội tụ của thuật toán.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn trực tiếp của GS. TSKH. Lê Dũng Mưu. Mặc dù, tác giả đã hết sức cố gắng nhưng do vấn đề được nghiên cứu là phức tạp và mới mẻ, lại do thời gian có hạn và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên khó tránh khỏi thiếu sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn.

Chương 1

Bài toán tối ưu trên tập Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine

Bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức affine, còn được gọi là bài toán tối ưu véc tơ phân thức affine là sự mở rộng của bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính, nhưng lớp các bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức affine thực sự rộng hơn lớp các bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính. Các kết quả nghiên cứu cho thấy rằng, tập Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức affine khác biệt và phức tạp hơn nhiều so với tập Pareto của bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính. Nhiều tính chất của trường hợp tuyến tính không còn đúng cho trường hợp phân thức affine. Nhiều vấn đề nghiên cứu cho lớp các bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức affine vẫn chưa có kết quả.

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu về bài toán tối ưu véctơ hàm phân thức affine. Cụ thể, chúng ta sẽ tìm hiểu các kiến thức cơ bản, như: bài toán tối ưu véc tơ phân thức affine, điểm Pareto (hay nghiệm hữu hiệu), điểm Pareto yếu (hay nghiệm hữu hiệu yếu), định lý về điều kiện cần và đủ của điểm Pareto và Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine. Đồng thời, chúng ta cũng sẽ trình bày một thuật toán nhánh-cận để giải bài toán tối ưu trên tập Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu hàm phân thức affine (còn gọi là Thuật toán LB). Các kiến thức ở chương này được trích dẫn từ các tài liệu [6], [7], [8], [9], [10] và [11].

1.1 Bài toán tối ưu véc tơ

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi, đóng, khác rỗng; $K \subset \mathbb{R}^p$ là nón lồi, đóng. Cho $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ là hàm véc tơ. Xét bài toán

$$\min_K \{f(x) : x \in D\}, \tag{1.1}$$

trong đó "$\min\limits_K$" được hiểu là cực tiểu theo nón K được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1. *Ta nói $\overline{x} \in D$ là điểm Pareto (hay nghiệm hữu hiệu) của bài toán* (1.1) *với quan hệ thứ tự cho bởi nón lồi K nếu không tồn tại $x \in D$ sao cho*

$$f(\overline{x}) - f(x) \in K \backslash \{0\}. \tag{1.2}$$

Ký hiệu tập Pareto (hay tập nghiệm hữu hiệu) của (1.1) là $S(f, D)$.
Vậy,

$$\overline{x} \in S(f, D) \Leftrightarrow \big(f(\overline{x}) - K\big) \cap f(D) = \{f(\overline{x})\}.$$

Định nghĩa 1.2. *Giả sử $intK \neq \emptyset$, trong đó $intK$ là ký hiệu phần trong tôpô của tập K. Ta nói $\overline{x} \in D$ là điểm Pareto yếu (hay nghiệm hữu hiệu yếu) của bài toán* (1.1) *nếu không tồn tại $x \in D$ sao cho*

$$f(\overline{x}) - f(x) \in intK. \tag{1.3}$$

Ký hiệu tập Pareto yếu (hay tập nghiệm hữu hiệu yếu) của (1.1) là $WS(f, D)$.
Vậy,

$$\overline{x} \in WS(f, D) \Leftrightarrow \big(f(\overline{x}) - intK\big) \cap f(D) = \emptyset.$$

Nhận xét 1.1. Với

$$K = \Big\{y = (y_1, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p : \ y_1 \geq 0, ..., y_p \geq 0\Big\}$$

thì (1.2) có nghĩa là

$$\begin{cases} f_i(x) \leq f_i(\overline{x}), \ \forall i = \overline{1, p} \\ \exists i_0 : \ f_{i_0}(x) < f_{i_0}(\overline{x}); \end{cases}$$

và (1.3) có nghĩa là

$$f_i(x) < f_i(\overline{x}), \ \forall i = \overline{1, p}.$$