BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

– – – – – – – – – –

ĐẶNG ĐÌNH HANH

PHÂN LỚP ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU CÁC ANN-HÀM TỬ VÀ CÁC ANN-PHẠM TRÙ BỆN

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 62. 46. 05. 01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

ĐẶNG ĐÌNH HANH

PHÂN LỚP ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU CÁC ANN-HÀM TỬ VÀ CÁC ANN-PHẠM TRÙ BỆN

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 62. 46. 05. 01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. NGUYỄN TIẾN QUANG

Hà Nội - 2011

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi được viết chung với các đồng tác giả. Kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các số liệu, các kết quả được trình bày trong trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Đặng Đình Hanh

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Tiến Quang. Thầy đã dẫn dắt tác giả làm quen với nghiên cứu khoa học từ khi tác giả đang là sinh viên. Ngoài những chỉ dẫn về mặt khoa học, sự động viên và lòng tin tưởng của Thầy dành cho tác giả luôn là động lực lớn giúp tác giả tự tin và say mê trong nghiên cứu. Qua đây tác giả xin bày tỏ sự biết ơn sâu sắc và lòng quý mến đối với Thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô và các bạn đồng nghiệp trong Bộ môn Đại số và Lý thuyết số, các thầy cô và các bạn đồng nghiệp trong khoa Toán -Tin đã tạo một môi trường công tác và nghiên cứu thuận lợi giúp tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả xin cảm ơn Ths. Nguyễn Thu Thủy về những sự giúp đỡ chân thành.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Phòng Sau đại học và BCN khoa Toán - Tin đã tạo những điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập, công tác và hoàn thành luận án này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn GS. TS. Nguyễn Quốc Thắng, GS. TS. Lê Văn Thuyết, PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn và hai thầy/cô phản biện độc lập về những góp ý bổ ích để luận án được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến ông bà, bố mẹ, anh chị em hai bên nội ngoại, cùng vợ. Gia đình là nguồn động viên và động lực to lớn đối với tác giả.

Tác giả

Mục lục

MỞ ĐẦU

I. Lý do chọn đề tài

Khái niệm *phạm trù monoidal* hay *tensor phạm trù* được đề xuất bởi S. Mac Lane [29], J. Bénabou [51] vào năm 1963. Mỗi phạm trù monoidal là một tựa vị nhóm, trong đó tập nền $\mathcal{C}$ được thay thế bởi một phạm trù và phép toán nhân $m : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ được thay thế bởi một hàm tử. Trong [29], S. Mac Lane đã đưa ra điều kiện đủ cho tính khớp của các ràng buộc tự nhiên của một phạm trù monoidal; và điều kiện đủ cho tính khớp của lớp *phạm trù monoidal đối xứng*, tức là một phạm trù monoidal có thêm ràng buộc giao hoán. Bài toán khớp cho lớp phạm trù monoidal thường được suy ra từ một kết quả mạnh hơn: mỗi phạm trù monoidal đều tương đương với một phạm trù monoidal chặt chẽ, tức là một phạm trù monoidal có các ràng buộc đều là những phép đồng nhất. Kết quả này đã được chứng minh bởi một vài tác giả như N. D. Thuận [50], C. Kassel [23], P. Schauenburg [48].

Việc xem xét các mối liên hệ phụ thuộc của một số tiên đề trong hệ tiên đề của một phạm trù monoidal đối xứng đã được G. M. Kelly trình bày trong [26]. Sau này, S. Kasangian và F. Rossi đã xem xét thêm một số mối liên hệ về tính đối xứng trong một phạm trù monoidal [24].

Phạm trù monoidal được "mịn hóa" để trở thành *phạm trù với cấu trúc nhóm*, khi bổ sung thêm khái niệm vật khả nghịch (Xem M. L. Laplaza [28], N. Saavedra Rivano [54]). Bây giờ, nếu phạm trù nền là một *groupoid* (nghĩa là mọi mũi tên đều đẳng cấu) thì ta được khái niệm *monoidal category group-like* (xem A. Fröhlich và C. T. C. Wall [16]), hay *Gr-category* (xem H. X. Sính [55]), hay *nhóm phạm trù* [6, 7, 8, 17], hoặc *2-nhóm* [4, 12, 19] theo cách gọi gần đây. Các *Gr*-phạm trù đã được phân lớp bởi nhóm đối đồng điều nhóm $H^3(G, A)$ (xem [55]). Trong trường hợp nhóm phạm trù có thêm ràng buộc giao hoán, chúng ta thu được khái niệm *phạm trù Picard* (*Pic-phạm trù*) [55], hay *nhóm phạm trù đối xứng* [5] hoặc *2-nhóm đối xứng* [12, 19].

Tâm của phạm trù monoidal được giới thiệu bởi A. Joyal và R. Street, như là sự khái quát hóa của khái niệm tâm của một vị nhóm. Tâm của một phạm trù monoidal cung cấp một cấu trúc bện tự nhiên và tầm thường, đó là một *tensor phạm trù bện* hay một *phạm trù monoidal bện* và nói chung không đối xứng. Sau đó, tâm của phạm trù xuất hiện như một công cụ để nghiên cứu nhóm phạm trù [6] và nhóm phạm trù phân bậc [17]. Trong [11], A. Davydov đã nghiên cứu về tâm đầy của một đại số trong phạm trù tâm của một phạm trù monoidal và đã thiết lập bất biến Morita của xây dựng này bằng cách mở rộng nó đến các phạm trù môđun. Tâm của phạm trù monoidal cũng xuất hiện trong bài toán đối ngẫu của các phạm trù monoidal được đưa ra bởi S. Majid [32, 33].

Trong [20], A. Joyal và R. Street đã phân lớp các nhóm phạm trù bện bởi phạm trù các hàm quadratic (dựa trên một kết quả của S. Eilenberg và S. Mac Lane về sự biểu diễn hàm quadratic bởi nhóm đối đồng điều aben $H^3_{ab}(G, A)$ [13, 14]). Trước đó, trường hợp nhóm phạm trù đối xứng (hay phạm trù Picard) đã được phân lớp bởi H. X. Sính [55].

Tình huống tổng quát hơn đối với các nhóm phạm trù Picard được đưa ra bởi A. Fröhlich và C. T. C. Wall với tên gọi *nhóm phạm trù phân bậc* [16] (sau này, A. Cegarra và E. Khmaladze gọi là *phạm trù Picard phân bậc* [10]). Các định lý phân lớp đồng luân cho các nhóm phạm trù phân bậc, các nhóm phạm trù bện phân bậc, và trường hợp riêng của nó, các phạm trù Picard phân bậc đã được trình bày theo thứ tự trong [17], [9], [10]. Từ mỗi phạm trù như vậy xuất hiện một 3-đối chu trình theo một nghĩa nào đó mà mỗi lớp tương đẳng của các phạm trù cùng loại là tương ứng với một lớp đối đồng điều chiều 3.

Các lớp phạm trù có hai cấu trúc monoidal đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả. Năm 1972, M. L. Laplaza [27] đã nghiên cứu về lớp *phạm trù có tính phân phối*. Kết quả chính của [27] là chứng minh định lý khớp cho lớp phạm trù này. Sau đó, trong [16], A. Fröhlich và C. T. C. Wall đã đưa ra khái niệm *phạm trù tựa vành* với chủ ý là đưa ra một hệ tiên đề mới gọn hơn của M. L. Laplaza [27]. Hai khái niệm này là những hình thức hóa của phạm trù các môđun trên một vành giao hoán.

Năm 1994, M. Kapranov và V. Voevodsky [25] đã bỏ đi những đòi hỏi trong hệ tiên đề của M. L. Laplaza có liên quan đến ràng buộc giao hoán của phép nhân và đưa ra tên gọi *phạm trù vành* cho lớp phạm trù này. Họ đã sử dụng phạm trù của các không gian vectơ trên một trường K, cùng với tích tenxơ và tổng trực tiếp để định nghĩa các 2-không gian vectơ trên K. Các phạm trù vành đã được sử dụng như một công cụ để nghiên cứu các phương trình Zamolodchikov [25].

Để có được những mô tả về cấu trúc, cũng như để có thể phân lớp đối đồng điều, N. T. Quang đã đưa ra khái niệm *Ann-phạm trù* [36], như một phạm trù hóa khái niệm vành, với những đòi hỏi về tính khả nghịch của các vật và của các mũi tên của phạm trù nền, tương tự như trường hợp của nhóm phạm trù (xem

[6, 54, 55]). Những đòi hỏi bổ sung này cũng không phải quá đặc biệt, bởi vì nếu $\mathcal{P}$ là một phạm trù Picard thì phạm trù End($\mathcal{P}$) các Pic-hàm tử trên $\mathcal{P}$ là một *Ann*-phạm trù (xem N. T. Quang [45]), điều này đã được nhắc lại trong [19]. Mặt khác, mỗi *Ann*-phạm trù mạnh là một phạm trù vành [35]. Năm 2008, N. T. Quang đã chứng minh được rằng mỗi lớp tương đẳng các *Ann*-phạm trù hoàn toàn được xác định bởi ba bất biến: vành R, $R-$song môđun M và một phần tử thuộc nhóm đối đồng điều Mac Lane $H^3_{MaL}(R, M)$ (xem [38]). Trường hợp chính quy (ràng buộc đối xứng thỏa mãn điều kiện $c_{X,X} = \text{id}$ đối với mọi vật X) đã được phân lớp bởi nhóm đối đồng điều Shukla $H^3_{Sh}(R, M)$ (xem [2]). Từ các kết quả phân lớp của các *Ann*-phạm trù chính quy, Trần Phương Dung đã giải bài toán về sự tồn tại và phân lớp các *Ann*-hàm tử giữa các *Ann*-phạm trù chính quy [1]. Mỗi *Ann*-phạm trù được xem như một one-object của Gpd-categories trong luận án của M. Dupont [12], hay như một one-point enrichments of SPC của V. Schmitt [49].

Năm 2006, M. Jibladze và T. Pirashvili [22] đã đưa ra khái niệm *vành phạm trù* với những sự sửa đổi từ hệ tiên đề của một *Ann*-phạm trù. Tuy nhiên, mối liên hệ giữa hai hệ tiên đề của *Ann*-phạm trù và vành phạm trù như thế nào? Hai lớp này có trùng nhau không, lớp này chứa lớp kia hay chúng chỉ giao nhau một phần? Một vành phạm trù còn được gọi là một *2-vành* theo cách gọi trong [12, 19]. Năm 2010, các tác giả F. Huang, S. H. Chen, W. Chen và Z. J. Zheng đã định nghĩa các 2-môđun trên các 2-vành và đưa ra sự biểu diễn của các 2-vành [19].

Bên cạnh những kết quả đã có về *Ann*-phạm trù, chúng tôi thấy rằng vẫn còn có những vấn đề liên quan tới *Ann*-phạm trù cần được nghiên cứu như: bài toán tồn tại và phân lớp các *Ann*-hàm tử giữa các *Ann*-phạm trù trong trường hợp tổng quát, mối liên hệ giữa *Ann*-phạm trù và vành phạm trù, tính bện trong lớp *Ann*-phạm trù,... Vì vậy, chúng tôi viết luận án với tiêu đề: "Phân lớp đối đồng điều các *Ann*-hàm tử và các *Ann*-phạm trù bện" để giải quyết những vấn đề nêu trên.

II. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của luận án bao gồm: sử dụng đối đồng điều vành của Mac Lane để nghiên cứu các *Ann*-hàm tử, xây dựng *Ann*-phạm trù cảm sinh bởi một *Ann*-hàm tử và xem xét mối liên hệ giữa hai hệ tiên đề của *Ann*-phạm trù và vành phạm trù; đưa ra định nghĩa *Ann*-phạm trù bện và một trường hợp riêng của nó là *Ann*-phạm trù đối xứng, đưa ra các ví dụ, xem xét mối liên hệ giữa *Ann*-phạm trù đối xứng với các phạm trù có tính phân phối và phạm trù tựa vành, xây dựng phạm trù thu gọn cho lớp *Ann*-phạm trù bện và tiến hành phân lớp các *Ann*-phạm trù bện.

III. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án bao gồm: *Ann*-phạm trù, *Ann*-hàm tử và tính bện (và một trường hợp riêng của nó là tính giao hoán) trong lớp *Ann*-phạm trù.

Phạm vi nghiên cứu của luận án là những bài toán thường gặp của lý thuyết phạm trù với cấu trúc, đó là bài toán phân lớp, xây dựng các ví dụ cụ thể, nghiên cứu các tính chất, các mối liên hệ phụ thuộc của các tiên đề và mối liên hệ giữa những lớp phạm trù có cấu trúc tương tự nhau.

IV. Phương pháp nghiên cứu

Ngoài những phương pháp nghiên cứu lý thuyết truyền thống, trong luận án này chúng tôi sử dụng triệt để phương pháp biểu đồ của lý thuyết phạm trù để chứng minh các biểu đồ giao hoán, thay cho các biến đổi đẳng thức trừu tượng.

V. Những đóng góp mới của luận án

Luận án đã đóng góp một số kết quả mới về *Ann*-phạm trù. Kết quả chính đầu tiên là sử dụng các nhóm đối đồng điều vành của Mac Lane để tiến hành giải bài toán tồn tại và phân lớp các *Ann*-hàm tử (Định lý 2.1.8, Định lý 2.1.9). Kết quả chính thứ hai của luận án là xây dựng *Ann*-phạm trù đối ngẫu của một *Ann*-hàm tử (Định lý 2.2.10). Đây là một phép dựng mới ngoài phép dựng *Ann*-phạm trù của một đồng cấu chính quy trong bài toán mở rộng vành. Kết quả tiếp theo của luận án là Định lý 2.3.3. Định lý đã chỉ ra rằng các *Ann*-phạm trù là chứa trong các vành phạm trù. Ngược lại, mỗi vành phạm trù khi bổ sung thêm một tiên đề về sự tương thích với các ràng buộc đơn vị sẽ trở thành một *Ann*-phạm trù (Định lý 2.3.4).

Những đóng góp tiếp theo của luận án có liên quan đến tính bện trong lớp *Ann*-phạm trù. Định lý 3.1.6 chỉ ra: Tâm của một *Ann*-phạm trù là một *Ann*-phạm trù bện và nói chung không đối xứng, đây là một kết quả tiếp nối các kết quả về tâm của một phạm trù monoidal đã được đưa ra trong [21]. Trên cơ sở xem xét mối liên hệ giữa *Ann*-phạm trù đối xứng với các phạm trù có tính phân