BỘ QUỐC PHÒNG
HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

____________ * ____________

ĐÀO TRỌNG QUYẾT

MỘT SỐ NGHIÊN CỨU VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH g-NAVIER-STOKES HAI CHIỀU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2013

BỘ QUỐC PHÒNG
HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

---- * ----

ĐÀO TRỌNG QUYẾT

MỘT SỐ NGHIÊN CỨU VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH g-NAVIER-STOKES HAI CHIỀU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 62 46 01 12

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Cung Thế Anh

HÀ NỘI - 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với các tác giả khác, đều đã được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất cứ một công trình nào khác.

NCS. Đào Trọng Quyết

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được thực hiện tại Bộ môn Toán - Khoa Công nghệ Thông tin - Học viện Kỹ thuật Quân sự, dưới sự hướng dẫn nghiêm khắc, tận tình, chu đáo của TS. Cung Thế Anh. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy, người đã dẫn dắt tác giả vào một hướng nghiên cứu tuy khó khăn, vất vả nhưng thực sự thú vị và có ý nghĩa.

Tác giả vô cùng biết ơn GS. TSKH Phạm Thế Long, PGS.TS. Đào Thanh Tĩnh, PGS.TS. Nguyễn Xuân Viên, PGS.TS. Tô Văn Ban, TS. Trần Đình Kế, TS. Trần Quang Vinh, TS. Nguyễn Công Minh đã cổ vũ động viên và truyền cho tác giả nhiều kinh nghiệm quý báu trong nghiên cứu khoa học.

Tác giả trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám đốc, Phòng Sau Đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự; đặc biệt là các thầy cô giáo trong Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự và Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Lời cảm ơn sau cùng, xin dành cho gia đình của tác giả, những người đã dành cho tác giả tình yêu thương trọn vẹn, từng ngày chia sẻ, động viên tác giả vượt qua mọi khó khăn để hoàn thành luận án. Tác giả thành kính dâng tặng món quà tinh thần này lên các bậc sinh thành, những người từng ngày đón đợi và hy vọng ở từng bước trưởng thành của tác giả.

Mục lục

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

H_g, V_g	các không gian hàm dùng để nghiên cứu hệ g-Navier-Stokes (xin xem chi tiết ở tr. 15-16)
V_g'	không gian đối ngẫu của không gian V_g
$(\cdot,\cdot)_g, \vert\cdot\vert$	tích vô hướng và chuẩn trong không gian H_g
$((\cdot,\cdot))_g, \Vert\cdot\Vert$	tích vô hướng và chuẩn trong không gian V_g
$\Vert\cdot\Vert_*$	chuẩn trong không gian V_g'
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	đối ngẫu giữa V_g và V_g'
$\vert\cdot\vert_p$	chuẩn trong không gian $L^p(\Omega)$, với $1 \le p \le \infty$
Id	ánh xạ đồng nhất
A, B, C	các toán tử dùng để nghiên cứu hệ g-Navier-Stokes (xin xem chi tiết ở tr. 16)
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$\rightharpoonup$	hội tụ yếu
$\overline{Y}^X$	bao đóng của Y trong X
$\mathcal{B}(X)$	họ các tập con bị chặn của X
$d_F(K)$	số chiều fractal của tập compact K
γ_0	$\gamma_0 = 1 - \dfrac{\vert\nabla g\vert_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}$ (xem trang 30)
u_t	hàm trễ $u_t(.)$ xác định bởi $u_t(s) = u(t+s)$
$\text{dist}(A, B)$	nửa khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A, B

MỞ ĐẦU

1. LỊCH SỬ VẤN ĐỀ VÀ LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Các phương trình và hệ phương trình trong cơ học chất lỏng xuất hiện khi mô tả chuyển động của các chất lỏng và khí như nước, không khí, dầu mỏ, ..., dưới những điều kiện tương đối tổng quát, và chúng xuất hiện khi nghiên cứu nhiều hiện tượng quan trọng trong khoa học hàng không, khí tượng học, công nghiệp dầu mỏ, vật lí plasma. Một trong những lớp hệ phương trình cơ bản quan trọng trong cơ học chất lỏng, miêu tả dòng chảy của chất lỏng lí tưởng, nhớt, không nén là hệ Navier-Stokes. Hệ phương trình Navier-Stokes được xây dựng từ các định luật bảo toàn khối lượng, động lượng và có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f(x,t), \\ \nabla\cdot u &= 0. \end{cases}$$

ở đó $u = u(x,t), p = p(x,t)$ tương ứng là hàm véctơ vận tốc và hàm áp suất cần tìm, $\nu = \text{const} > 0$ là hệ số nhớt và f là ngoại lực.

Mặc dù được đưa ra lần đầu tiên vào năm 1822, cho đến nay đã có rất nhiều bài báo và sách chuyên khảo viết về hệ phương trình Navier-Stokes, tuy nhiên những hiểu biết của chúng ta về nghiệm của hệ phương trình này còn khá khiêm tốn. Nói riêng, cho đến nay vấn đề tồn tại nghiệm mạnh toàn cục và tính duy nhất của nghiệm yếu trong trường hợp ba chiều vẫn là thách thức lớn đối với các nhà toán học cũng như vật lý. Tuy nhiên, vì nhu cầu của Khoa học và Công nghệ mà việc nghiên cứu hệ phương trình Navier-Stokes nói riêng và các phương trình, hệ phương trình trong cơ học chất lỏng nói chung ngày càng trở nên thời sự và cấp thiết. Như được đề cập đến trong các cuốn chuyên khảo [58, 59] và các bài báo tổng quan gần đây [10, 61], những vấn đề cơ bản đặt ra khi nghiên cứu các phương trình và hệ phương trình trong cơ học chất lỏng là:

- *Sự tồn tại, tính duy nhất và tính chính qui của nghiệm*: Nghiệm ở đây có thể là nghiệm yếu hoặc nghiệm mạnh. Tính chính qui ở đây có thể là tính chính qui theo biến thời gian (tính giải tích, tính Gevrey) hoặc tính chính qui theo biến không gian (tính chính qui Hilbert, tính chính qui Hölder, mô tả tập điểm kì dị).

- *Dáng điệu tiệm cận của nghiệm*: Nghiên cứu dáng điệu của nghiệm khi thời gian t ra vô cùng. Trong trường hợp ngoại lực f "lớn", chúng ta nghiên cứu sự tồn tại và tính chất của tập hút, đó là một tập compact, bất biến, hút các tập bị chặn và chứa đựng nhiều thông tin về dáng điệu tiệm cận nghiệm; còn khi ngoại lực f "nhỏ" và không phụ thuộc thời gian, chúng ta nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm dừng, tức là nghiệm của bài toán dừng tương ứng, và chứng minh nghiệm của hệ đang xét dần đến nghiệm dừng này khi thời gian t ra vô cùng. Việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận rất quan trọng vì nó cho phép dự đoán xu thế phát triển trong tương lai của hệ đang xét, từ đó có những điều chỉnh thích hợp để đạt mục đích mong muốn.

- *Xấp xỉ nghiệm*: Vì các phương trình trong cơ học chất lỏng đóng một vai trò quan trọng trong các lĩnh vực khoa học và kĩ thuật nên ta cần cả những mô tả định tính và định lượng của nghiệm, nói riêng là việc tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình (vì nói chung ta không thể tìm được nghiệm chính xác của phương trình, mặc dù nó tồn tại). Việc xấp xỉ nghiệm chính xác của phương trình trong khoảng thời gian hữu hạn hoặc xấp xỉ dáng điệu tiệm cận nghiệm là những vấn đề hết sức quan trọng khi áp dụng vào các mô hình thực tế. Về mặt toán học, chúng ta phải xây dựng các lược đồ xấp xỉ nghiệm, chứng minh lược đồ nhận được