BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

LÂM THÙY DƯƠNG

TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO MỘT HỌ CÁC ÁNH XẠ GIẢ CO CHẶT

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2013

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

LÂM THÙY DƯƠNG

TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO MỘT HỌ CÁC ÁNH XẠ GIẢ CO CHẶT

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. GS. TS. Nguyễn Bường

2. GS. TS. Yeol Je Cho

THÁI NGUYÊN - 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Nguyễn Bường và GS. TS. Yeol Je Cho.

Các kết quả trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của người khác.

Nghiên cứu sinh

Lâm Thùy Dương

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm thuộc Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Nguyễn Bường và GS. TS. Yeol Je Cho. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới các thầy.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn tới các Thầy, Cô: GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, PGS. TS. Phạm Hiến Bằng, PGS. TS. Phạm Việt Đức, TS. Nguyễn Công Điều, GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy đã chỉ bảo tận tình và cho những ý kiến đóng góp quí báu trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tới Ban Giám đốc Đại học Thái Nguyên, Ban Sau đại học, Ban Giám hiệu trường Đại học Sư phạm, Phòng Sau đại học, Ban Chủ nhiệm khoa Giáo dục Tiểu học và Ban Chủ nhiệm khoa Toán trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu sinh.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tới bạn bè đồng nghiệp, anh chị em nghiên cứu sinh đã trao đổi, giúp đỡ, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận án.

Tác giả xin kính tặng những người thân yêu trong gia đình của mình niềm vinh hạnh to lớn này.

Nghiên cứu sinh

Lâm Thùy Dương

Mục lục

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$\mathbb{N}$	tập hợp số tự nhiên
H	không gian Hilbert H
E	không gian Banach E
E^*	không gian liên hợp của E
I	ánh xạ đơn vị
$\mathcal{D}(T)$	miền xác định của ánh xạ T
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của x và y
$\\|x\\|_X$	chuẩn của x trong không gian X
$\inf\limits_{x\in X} F(X)$	cận dưới lớn nhất của tập $\{F(x) : x \in X\}$
$\sup\limits_{x\in X} F(X)$	cận trên nhỏ nhất của tập $\{F(x) : x \in X\}$
c_0	không gian các dãy số hội tụ tới 0 với chuẩn sup
$X \cap Y$	X giao với Y
$x_n \rightharpoonup x$	dãy x_n hội tụ yếu tới x
$x_n \to x$	dãy x_n hội mạnh tới x
θ	phần tử không
P_C	phép chiếu mêtric lên C
$Fix(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach E

Mở đầu

Trong toán học người ta thường gặp bài toán tìm một phần tử thuộc vào giao của một họ các tập lồi đóng C_i trong không gian Hilbert hay Banach, với $i = 1, 2, \ldots$, ở đây mỗi tập C_i có thể cho dưới dạng hiện như: hình cầu, không gian con cũng như nửa không gian hoặc dưới dạng ẩn như: tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn T_i, tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân với ánh xạ đơn điệu A_i, hay tập nghiệm của bài toán cân bằng với song hàm $G_i(u, v)$. Bài toán này thường được gọi là bài toán *Chấp nhận lồi* và nó có ứng dụng rộng rãi trong lĩnh vực xử lý ảnh như phục chế lại và tạo ảnh dựa vào các dữ liệu liên quan trực tiếp hay gián tiếp đến vật thể cần xây dựng ảnh (xem [6], [26], [35], [63]). Lĩnh vực này còn có nhiều ứng dụng trong y học, quân đội, công nghiệp và đặc biệt là trong thiên văn hay công nghệ sinh học.

Trong trường hợp $cardG = 2$ và C_1, C_2 là các không gian con của H, bài toán này đã được Neumann J. V. [53] nghiên cứu vào năm 1949. Xuất phát từ một điểm x bất kỳ, ông xây dựng hai dãy $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ như sau:

$$y_0 = x,\ x_k = P_{C_1}(y_{k-1}),\ y_k = P_{C_2}(x_k),\ k = 1, 2, ..., \tag{0.1}$$

và đã chứng minh được rằng cả hai dãy này hội tụ mạnh đến $P_C(x)$ khi $k \to \infty$, ở đây $C = C_1 \cap C_2$ và $P_C(x)$ là phép chiếu mêtric lên C. Khi C_1, C_2 là các tập con lồi đóng bất kỳ của H, năm 1965, Bregman L. M. [13] chứng minh được sự hội tụ yếu của các dãy lặp xác định như trên đến $P_C(x)$.

Trong trường hợp $cardG \geq 2$ và mỗi tập C_i cho dưới dạng là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn T_i, thì bài toán trên là bài toán tìm điểm bất động chung cho một họ các ánh xạ không giãn $\{T_i\}_{i\geq 2}$ và đã được các nhà toán học Ceng L. C. [19]−[20], Maingé P. E. [43], Marino G., Takahashi W. [64] − [66], Xu H. K. [47], [48], ... nghiên cứu.

Mục đích của đề tài luận án là nghiên cứu một phương pháp giải mới để tìm điểm bất động chung cho một họ các ánh xạ giả co chặt, chứa trường hợp riêng là một họ các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Đối với ánh xạ λ-giả co chặt T trong không gian Hilbert được xác định bởi

$$\| T(x) - T(y) \|^2 \leq \| x - y \|^2 + \lambda \| (I - T)(x) - (I - T)(y) \|^2, \qquad (0.4)$$

với $0 \leq \lambda < 1$, Browder F. E. và Petryshyn W.V. [14], năm 1967, đã chứng minh sự hội tụ yếu của phương pháp lặp Mann

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)T(x_n) \qquad (0.5)$$

tới một điểm bất động của T, khi $\lambda < \alpha < 1$.

Năm 1979, Reich S. [59] đã cải tiến kết quả trên cho lớp các ánh xạ không giãn trong không gian Banach lồi đều và dãy lặp $\{x_n\}$ được xác định theo công thức:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)T(x_n). \qquad (0.6)$$

Với điều kiện dãy số $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ thỏa mãn $0 < \alpha_n < 1$ và $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$, tác giả đã chứng minh được sự hội tụ yếu của dãy lặp (0.6) tới một điểm bất động của ánh xạ không giãn T.

Ta thấy rằng các kết quả trên chỉ cho được sự hội tụ yếu, thậm chí với cả ánh xạ không giãn. Để nhận được sự hội tụ mạnh đến điểm bất động của ánh xạ không giãn T trong không gian Hilbert, Nakajo K. và Takahashi W. [52] đã đề xuất phương pháp lai ghép sau:

$$
\begin{aligned}
x_0 &\in C,\\
y_n &= \alpha x_n + (1-\alpha)T(x_n),\\
C_n &= \{z \in C : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|,\\
Q_n &= \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\},\\
x_{n+1} &= P_{C_n \cap Q_n}(x_0),
\end{aligned}
\tag{0.7}
$$

ở đây, dãy số $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện $\sup_{n\ge 0}\alpha_n < 1$.

Năm 2007, Marino G. và Xu H. K. [48] mở rộng kết quả của Nakajo K. và Takahashi W. [52] cho ánh xạ giả co chặt và thu được kết quả hội tụ mạnh của dãy lặp tới một điểm bất động của ánh xạ giả co chặt T trong không gian Hilbert. Sau này, một số tác giả khác mở rộng hơn nữa kết quả trên cho một họ các ánh xạ giả co chặt (xem [3], [68], [16], [21]).

Năm 2010, Cho Y. J. [21] giới thiệu một phương pháp lặp để tìm điểm bất động chung cho một họ vô hạn các ánh xạ giả co chặt trong không gian Banach như sau:

$$
x_0 \in C, \quad x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n T_n(x_n) + \gamma_n u_n, \quad \forall n \ge 1, \tag{0.8}
$$

ở đây C là tập lồi đóng của không gian Banach E, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} : C \to C$ là họ vô hạn các ánh xạ giả co chặt, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực trong đoạn $[0,1]$ sao cho $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, còn $\{u_n\}$ là một dãy bị chặn trong C. Với các điều kiện thích hợp cho tham số tác giả đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của dãy lặp (0.8) tới một điểm bất động chung của một họ vô hạn các ánh xạ giả co chặt $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$. Gần đây, bài toán này cũng được Song Y. L. [62], Xu W. và Wang Y. [76] nghiên cứu.

Trong luận án này, chúng tôi vận dụng phương pháp nguyên lý bài toán phụ hiệu chỉnh để giải bài toán tìm điểm bất động chung cho một họ vô hạn các ánh xạ giả co chặt trong không gian Hilbert. Phương pháp này là sự kết hợp giữa nguyên lý bài toán phụ, được đề xuất bởi Cohen vào năm

1980 và phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov. Phương pháp nguyên lý bài toán phụ được đề xuất để tìm nghiệm cho bất đẳng thức biến phân cổ điển: *tìm* $u^* \in C$ *sao cho*

$$\langle F(u^*), v - u^* \rangle \geq 0 \quad v \in C, \tag{0.9}$$

ở đây $F : C \to H$ là ánh xạ đơn điệu mạnh, liên tục Lipschitz và C là một tập con lồi đóng của không gian Hilbert H. Khi ánh xạ F không có tính đơn điệu mạnh, năm 2000, Baasansuren J. và Khan A. A. đã kết hợp nguyên lý bài toán phụ với phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov để được phương pháp *Nguyên lý bài toán phụ hiệu chỉnh.*

Cho một họ vô hạn các ánh xạ λ_i-giả co chặt $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ từ một tập lồi đóng C của không gian Hilbert H vào H. Giả sử rằng $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{\infty} Fix(T_i) \neq \emptyset$, ở đây $Fix(T_i)$ là tập điểm bất động của ánh xạ T_i. Ta xét bài toán: *tìm một phần tử*

$$u^* \in \mathcal{F}. \tag{0.10}$$

Để vận dụng phương pháp trên cho bài toán (0.10), trước tiên chúng tôi xây dựng nghiệm hiệu chỉnh u_α, là nghiệm của bất đẳng thức biến phân sau: *tìm* $u_\alpha \in C$ *sao cho*

$$\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i(u_\alpha) + \alpha u_\alpha, v - u_\alpha \right\rangle \geq 0 \;\; \forall v \in C, \tag{0.11}$$

ở đây, $A_i = I - T_i$, $\alpha > 0$ là tham số hiệu chỉnh đủ nhỏ dần đến 0 và $\{\gamma_i\}$ là dãy số thực thỏa mãn điều kiện:

$$\gamma_i > 0; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{\widetilde{\lambda}_i} = \gamma < \infty, \quad \widetilde{\lambda}_i = \frac{1 - \lambda_i}{2}.$$

Thuật toán nguyên lý bài toán phụ hiệu chỉnh được thiết lập như sau:

Cho $\varphi : H \to \mathbb{R}$ là một phiếm hàm lồi chính thường và khả vi Gâteaux, với φ' đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz. Cho $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ và $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ là hai dãy số thực dương.