BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐẶNG VĂN CƯỜNG

MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐỊA PHƯƠNG VÀ TOÀN CỤC CỦA MẶT ĐỐI CHIỀU HAI TRONG KHÔNG GIAN LORENTZ-MINKOWSKI

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2013

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐẶNG VĂN CƯỜNG

MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐỊA PHƯƠNG VÀ TOÀN CỤC CỦA MẶT ĐỐI CHIỀU HAI TRONG KHÔNG GIAN LORENTZ-MINKOWSKI

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Hình học và Tôpô

Mã số: 62 46 10 01

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. ĐOÀN THẾ HIẾU
TS. NGUYỄN DUY BÌNH

Nghệ An - 2013

MỤC LỤC

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và luận án không trùng lặp với bất kì tài liệu nào khác.

Tác giả

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành tại trường Đại học Vinh dưới sự hướng dẫn của thầy giáo PGS. TS. Đoàn Thế Hiếu và thầy giáo TS. Nguyễn Duy Bình. Sự định hướng của quý Thầy trong nghiên cứu, sự nghiêm khắc của các Thầy trong học tập và sự hướng dẫn tận tình của quý Thầy trong làm việc là những yếu tố cơ bản nhất tác động nên việc hoàn thành luận án. Thêm vào đó là tình yêu thương của hai Thầy dành cho tác giả trong cuộc sống đã cho tác giả có sức mạnh để vượt qua rất nhiều khó khăn trong học tập và nghiên cứu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến với hai Thầy.

Luận án như là món quà tác giả tặng đến gia đình mình, những người đã dành cho tác giả những gì tốt nhất trong quá trình học tập. Cảm ơn người vợ thân yêu đã nỗ lực hết sức một mình chăm sóc gia đình trong suốt thời gian tác giả đi học.

Tác giả gửi lời cảm ơn đến Khoa Toán và Khoa Sau đại học - Trường Đại học Vinh, nơi tác giả đã học tập và nghiên cứu trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Tác giả gửi lời cảm ơn đến Trường Đại học Duy Tân và Khoa Khoa học tự nhiên - Trường Đại học Duy Tân, nơi tác giả công tác giảng dạy và cũng là nơi cử tác giả đi làm nghiên cứu sinh.

Tác giả gửi lời cảm ơn đến Khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm Huế, nơi tác giả đã dành nhiều thời gian làm nghiên cứu.

Tác giả gửi lời cảm ơn sâu sắc đến PGS. TS. Nguyễn Huỳnh Phán, PGS. TS. Nguyễn Hữu Quang, GS. TSKH. Đỗ Ngọc Diệp, TS. Kiều Phương Chi và PGS. TS. Trần Văn Ân đã dành thời gian đọc luận án và cho tác giả những nhận xét quý báu.

Tác giả gửi lời cảm ơn đến tất cả các nhà khoa học, thầy cô, người thân, bạn bè vì những góp ý, ủng hộ và động viên về tinh thần cũng như vật chất dành cho tác giả.

Nghệ An, tháng 01 năm 2013

Đặng Văn Cường

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

1.1 Việc nghiên cứu các tính chất địa phương và toàn cục của mặt là một trong những vấn đề cơ bản của hình học vi phân. Tính chất địa phương của mặt là những tính chất liên quan đến tham số hóa địa phương của mặt, còn tính chất toàn cục là những tính chất thể hiện trên toàn bộ mặt mà không chịu sự chi phối của tham số hóa địa phương.

Chúng ta đã biết, trong hình học vi phân cổ điển, một trong những công cụ cơ bản để nghiên cứu các tính chất địa phương của mặt là ánh xạ Gauss. Ánh xạ Gauss đưa đến các khái niệm độ cong bao gồm: độ cong Gauss; độ cong trung bình; độ cong chính,.... Với các mặt đối chiều một, mặt trong $\mathbb{R}^3$ và siêu mặt trong $\mathbb{R}^n$, ánh xạ Gauss đã chứng tỏ là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu tính chất địa phương của chúng. Chẳng hạn, dựa vào tính chất của độ cong chúng ta nhận được kết quả: một mặt chính quy trong $\mathbb{R}^3$ là mặt rốn khi và chỉ khi nó là (một phần của) một mặt cầu hoặc (một phần của) một mặt phẳng.

Đối với các tính chất toàn cục của mặt, một trong những công cụ để tìm được mối liên hệ giữa tính chất địa phương với tính chất toàn cục là trường Jacobi dọc theo một đường trắc địa. Thông qua công cụ này một số tính chất toàn cục của mặt trong $\mathbb{R}^3$ đã được đưa ra trong lý thuyết hình học vi phân cổ điển. Chẳng hạn, một mặt chính quy trong $\mathbb{R}^3$ có độ cong Gauss đồng nhất bằng không khi và chỉ khi nó là mặt kẻ khả triển.

Việc tìm hiểu các kết quả thể hiện các tính chất hình học của lớp mặt kiểu không gian đối chiều hai trong không gian Lorentz-Minkowski, tương tự như trường hợp của mặt trong $\mathbb{R}^3$, là một trong những vấn đề được chúng tôi quan tâm.

1.2 Hình học của mặt trong $\mathbb{R}^4$ đã được quan tâm nghiên cứu trong một số công trình như: [10], [31], [32], [38], [34], [26], [30], [39].... Chúng ta có thể điểm lại một số kết quả chính đã đạt được trong lĩnh vực này như sau. Vào năm 1969, Little [26] đã xây dựng các bất biến hình học, chẳng hạn như elip độ cong, để nghiên cứu tính kỳ dị của đa tạp con đối chiều hai trong không gian Ơ-clít. Cũng trong [26] tác giả đã chỉ ra được rằng mặt trong $\mathbb{R}^4$ thoả mãn điều kiện mọi trường vectơ pháp là trường trùng pháp khi và chỉ khi nó là một mặt kẻ khả triển. Đến năm 1995, Mochida và một số tác giả khác trong [31] đưa ra một số điều kiện cần và đủ về sự tồn tại trường trùng pháp của mặt trong $\mathbb{R}^4$. Trong bài báo này các tác giả đã khẳng định điều kiện cần và đủ để mặt trong $\mathbb{R}^4$ chấp nhận đúng hai trường trùng pháp là lồi ngặt địa phương. Các kết quả này được mở rộng lên mặt đối chiều hai trong $\mathbb{R}^{n+2}$ bởi Mochida và một số tác giả khác trong [32] vào năm 1999. Hướng nghiên cứu này được tiếp tục bởi Romero-Fuster và Sánchez-Brigas [38] vào năm 2002, để nghiên cứu khái niệm rốn trên mặt. Trong [38] các tác giả đã chỉ ra mối quan hệ tương đương giữa các lớp mặt: ν-rốn, tồn tại hai phương tiệm cận trực giao với nhau tại mọi điểm, nửa rốn và độ cong pháp đồng nhất bằng không. Đến năm 2010, Nuño-Ballesteros và Romero-Fuster [34] xây dựng khái niệm quỹ tích độ cong (curvature locus), nó là một mở rộng của khái niệm elip độ cong cho mặt đối chiều hai trong $\mathbb{R}^{n+2}$, để nghiên cứu tính chất của các đa tạp con đối chiều hai. Trong bài báo này các tác giả cũng đã chuyển một số kết quả trong [38] lên đa tạp con đối chiều hai trong $\mathbb{R}^{n+2}$.

Việc phát triển các kết quả nghiên cứu về mặt trong $\mathbb{R}^4$ lên mặt kiểu không gian đối chiều hai trong không gian Lorentz-Minkowski là một trong những vấn đề chúng tôi quan tâm nghiên cứu.

1.3 Những năm gần đây một số kết quả nghiên cứu mặt kiểu không gian đối chiều hai trong không gian Lorentz-Minkowski đã được công bố, chẳng hạn như [17], [20], [21], [22], [24], [23],.... Chúng ta điểm qua một số kết quả chính cho lĩnh vực này như sau. Bằng cách sử dụng tính chất của độ cong liên kết với một trường vectơ pháp để nghiên cứu mặt kiểu không gian đối chiều hai, vào năm 2004 Izumiya và một số tác giả khác trong [20] đã chỉ ra rằng nếu mặt chứa trong một giả cầu thì nó là mặt ν-rốn, trong đó ν là trường vectơ vị trí của mặt. Với chiều ngược lại của mệnh đề này, các tác giả trong [20] bổ sung thêm giả thiết song song của ν để mặt ν-rốn chứa trong một giả cầu. Trong bài báo này các tác giả cũng đã trình bày lại cách xây dựng khái niệm elip độ cong cho mặt kiểu không gian hai chiều trong không gian Lorentz-Minkowski số chiều lớn hơn 3 và chỉ ra mối liên hệ giữa mặt ν-rốn và mặt nửa rốn, nó là mặt mà elip độ cong suy biến thành một đoạn thẳng. Xuất phát từ tính chất mặt phẳng pháp của một mặt kiểu không gian đối chiều hai là một 2-phẳng kiểu thời gian, dễ dàng chỉ ra được rằng nó có một cơ sở giả trực chuẩn với một vectơ kiểu không gian và một vectơ kiểu thời gian. Bằng cách sử dụng tổng và hiệu của hai vectơ trong cơ sở này của mặt phẳng pháp, vào năm 2007 Izumiya và một số tác giả trong [21], đã xây dựng khái niệm ánh xạ Gauss nón ánh sáng và nghiên cứu khái niệm dẹt trên các mặt kiểu không gian đối chiều hai.

Tìm cách xác định một trường vectơ pháp trên mặt kiểu không gian đối chiều hai, xem như ánh xạ Gauss, thuận tiện cho việc nghiên cứu các tính chất hình học của mặt, cũng là một trong những vấn đề chúng tôi quan tâm.

1.4 Nghiên cứu tính phẳng, điều kiện chứa trong mặt phẳng, của một đường cong trong $\mathbb{R}^3$ là một bài toán cổ điển của hình học vi phân. Tính phẳng của đường cong phụ thuộc vào độ xoắn của đường cong, đường cong là phẳng khi và chỉ khi độ xoắn của nó bằng không. Điều này tương đương với trường vectơ trùng pháp của đường cong là trường vectơ hằng. Ngoài ra một số tính chất của mặt phẳng mặt tiếp của đường cong cũng cho chúng ta một số điều kiện đủ để đường cong phẳng.

Tìm kiếm các điều kiện đủ để một mặt kiểu không gian trong $\mathbb{R}^4_1$ chứa trong một siêu phẳng cũng là một trong những vấn đề chúng tôi quan tâm.

1.5 Việc nghiên cứu các lớp mặt đặc biệt trong không gian, chẳng hạn mặt kẻ, mặt tròn xoay, ..., cũng là một trong những vấn đề được các nhà hình học quan tâm. Khi xây dựng một công cụ nào đó để nghiên cứu các lớp mặt, công cụ đó thực sự có giá trị nếu nó có thể đưa ra một phân loại cho các lớp mặt đặc biệt này. Chúng tôi cũng mong muốn đưa ra các định lí phân loại cho các lớp mặt đặc biệt, chẳng hạn như mặt kẻ cực đại, mặt tròn xoay cực đại hay khảo sát khái niệm rốn trên các lớp mặt này.

Bởi các lý do nêu ở trên, tôi chọn đề tài "**Một số tính chất địa phương và toàn cục của mặt đối chiều hai trong không gian Lorentz-Minkowski"** làm đề tài luận án tiến sĩ.

2. Mục đích nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu một số tính chất hình học của mặt đối chiều hai trong không gian Lorentz-Minkowski với các mục đích sau.

(1) Xây dựng một số công cụ hữu hiệu để có thể nghiên cứu các tính chất hình học của mặt kiểu không gian đối chiều hai.

(2) Nghiên cứu các khái niệm rốn trên mặt kiểu không gian đối chiều hai, đưa ra một số kết quả phân loại mặt kiểu không gian ν-rốn đối chiều hai và mặt kiểu không gian rốn đối chiều hai.

(3) Nghiên cứu mối quan hệ giữa mặt ν-rốn và mặt ν-phẳng.

(4) Nghiên cứu các điều kiện chứa trong siêu phẳng của mặt trong không gian $\mathbb{R}^4$ sau đó mở rộng lên mặt kiểu không gian trong $\mathbb{R}^4_1$.

(5) Sử dụng các kết quả đạt được theo hướng nghiên cứu để ứng dụng vào việc khảo sát tính chất hình học của một số lớp mặt kiểu không gian đặc biệt trong không gian Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}^4_1$, đó là mặt kẻ và mặt tròn xoay.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án bao gồm: mặt kiểu không gian đối chiều hai; các công cụ nghiên cứu mặt kiểu không gian đối chiều hai; các tính chất hình học của mặt kiểu không gian đối chiều hai trong không gian Lorentz-Minkowski. Vậy nên, nếu không được nhắc lại, đối tượng mặt trong luận án được hiểu là mặt kiểu không gian đối chiều hai.

4. Phạm vi nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu một số tính chất địa phương và toàn cục trên mặt kiểu không gian đối chiều hai, nghiên cứu một số lớp mặt kiểu không gian đối chiều hai đặc biệt trong không gian Lorentz-Minkowski.

5. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp lý thuyết trong quá trình thực hiện đề tài. Bằng cách sử dụng các công cụ là các độ cong trên mặt, chẳng hạn độ cong liên kết với một trường vectơ pháp; elip độ cong; độ cong Gauss, chúng tôi tìm kiếm các tính chất hình học của mặt đối chiều hai thoả mãn tương ứng các điều kiện của các độ cong này cũng như mối liên hệ giữa các lớp mặt đó.