BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

Phạm Đức Thoan

VỀ QUAN HỆ SỐ KHUYẾT VÀ SỰ PHỤ THUỘC THUỘC ĐẠI SỐ CỦA ÁNH XẠ PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: HÌNH HỌC VÀ TÔPÔ
Mã: 62.46.10.01

LUẬN ÁN TIẾN SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH ĐỖ ĐỨC THÁI

Hà Nội, 01-2011

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan những kết quả được trình bày trong luận án là mới. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Lời cảm ơn

Luận án được hoàn thành dưới sự quan tâm và hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Đỗ Đức Thái. Nhân dịp này, tôi xin được gửi tới Thầy lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất. Tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến GS.TSKH Hà Huy Khoái, PGS.TSKH Trần Văn Tấn và TS Sĩ Đức Quang, những người đã bỏ công sức đọc bản thảo và cho tôi nhiều ý kiến chỉnh sửa quý báu để tôi có thể hoàn thành tốt hơn bản luận án này.

Tôi xin được bày tỏ lòng cảm ơn đến Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Phòng Sau đại học và Ban Giám hiệu của Trường ĐHSP Hà Nội đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi có thể hoàn thành luận án của mình.

Cuối cùng, tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô trong Khoa Toán-Tin thuộc Trường ĐHSP Hà Nội, Khoa Công nghệ Thông Tin thuộc Trường ĐH Xây Dựng, Trường THPT Hải Hậu A, các thành viên của Seminar Hình học phức thuộc Khoa Toán - Tin Trường ĐHSP Hà Nội, cùng các bạn đồng nghiệp về sự động viên khích lệ cũng như những trao đổi hữu ích trong suốt quá trình học tập và công tác.

Nghiên cứu sinh: Phạm Đức Thoan

Mục lục

Danh mục các kí hiệu **5**

Mở đầu **7**

Chương 1. Về lớp hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại **14**

1.1 Định nghĩa và ký hiệu 15

1.2 Một số kết quả ban đầu 17

1.3 Về lớp hàm có tổng số khuyết cực đại 27

Chương 2. Ánh xạ phân hình có tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động **34**

2.1 Một số khái niệm cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna . 35

2.2 Các kết quả ban đầu 39

2.3 Ánh xạ phân hình với tổng số khuyết cực đại 46

Chương 3. Sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình và ứng dụng **52**

3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ 56

3.2 Sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình 59

3.3 Định lý duy nhất với bội bị chặn đối với ánh xạ phân hình 71

Kết luận và kiến nghị **75**

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án **77**

Tài liệu tham khảo **78**

Danh mục các kí hiệu

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: không gian xạ ảnh phức $n-$ chiều.
- $B_m(r)$: hình cầu mở bán kính r trong $\mathbb{C}^m$.
- $S_m(r)$: mặt cầu bán kính r trong $\mathbb{C}^m$.
- $d = \partial + \overline{\partial}, d^c = \frac{i}{4\pi}(\partial - \overline{\partial})$: các toán tử vi phân.
- $\omega_m(z) = dd^c \log ||z||^2, \sigma_m(z) = d^c \log ||z||^2 \wedge \omega_m^{m-1}(z)$ và $\nu_m(z) = dd^c||z||^2$: các dạng vi phân.
- $\mathcal{M}_m$: trường các hàm phân hình trên $\mathbb{C}^m$.
- $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^q) \subset \mathcal{M}_n$: trường con nhỏ nhất chứa $\mathbb{C}$ và tất cả các $\dfrac{a_{jk}}{a_{jl}}$ với $a_{jl} \not\equiv 0$.
- $O(1)$: hàm bị chặn đối với r.
- $O(r)$: vô cùng lớn cùng bậc với r khi $r \to +\infty$.
- $o(r)$: vô cùng bé bậc cao hơn r khi $r \to +\infty$.
- $\log^+ r = \max\{\log r, 0\}$.
- $T_f(r)$: hàm đặc trưng của ánh xạ $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
- $\mu_{f_1 \wedge f_2 \cdots \wedge f_k}$: divisor không điểm của ánh xạ $f_1 \wedge f_2 \cdots \wedge f_k$.
- $N(r, D)$: hàm đếm của divisor D.
- $n_f(r, a), N_f(r, a)$: hàm đếm của divisor f^*a với $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ và $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

- $m_f(r,a)$: hàm xấp xỉ của hàm $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ứng với $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
- $\delta(a,f)$, $\delta^{[k]}(a,f)$: số khuyết và số khuyết chặn bội bởi k của f tại a.
- ρ_f, γ_f: bậc và bậc dưới của hàm f.
- $D_f(z) = \sum_{j=1}^{m} z_j f_{z_j}(z)$: đạo hàm toàn thể của hàm f.
- $m_{f,H}(r), m_{f,a}(r)$: lần lượt là hàm xấp xỉ của f ứng với siêu phẳng H và ứng với ánh xạ phân hình a.
- $W(f)$: Wronski của hàm f.
- $\bigwedge^k \mathbb{C}^m$: tích ngoài bậc k của $\mathbb{C}^m$.
- $''\|\ P''$: có nghĩa là mệnh đề P đúng với mọi $r \in [0,+\infty)$ nằm ngoài một tập con Borel E của $[0,+\infty)$ thoả mãn $\int_E dr < +\infty$.

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Vào cuối những năm 20 của thế kỷ trước R. Nevanlinna đã xây dựng lý thuyết phân bố giá trị của các hàm phân hình một biến. Trong những thập niên tiếp theo nhiều nhà toán học lớn trên thế giới như H. Cartan, W. Stoll, P. A. Griffiths, L. Carlson, P. Vojta, J. Noguchi... đã quan tâm nghiên cứu và phát triển lý thuyết Nevanlinna cho những lớp đối tượng tổng quát hơn. Cho đến nay, lý thuyết Nevanlinna đã trở thành một trong những lý thuyết quan trọng của toán học với nhiều định lý đẹp đẽ và sâu sắc đã được chứng minh. Kết quả nổi bật nhất của nó là bất đẳng thức về số khuyết và các định lý duy nhất. Bởi sự hấp dẫn mang tính hình học của lý thuyết này, chúng tôi lựa chọn đề tài "**Về quan hệ số khuyết và sự phụ thuộc đại số của ánh xạ phân hình**". Cụ thể, chúng tôi tập trung nghiên cứu và đã đưa ra được các kết quả về số khuyết cho các hàm phân hình vào $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ và các ánh xạ phân hình vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, đồng thời chúng tôi cũng nghiên cứu sự phụ thuộc đại số và ứng dụng các kết quả này vào việc nghiên cứu vấn đề duy nhất với bội bị chặn đối với các ánh xạ phân hình nhiều biến phức.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

Mục đích của luận án là nghiên cứu ánh xạ phân hình có tổng số khuyết cực đại và sự phụ thuộc đại số của ánh xạ phân hình nhiều biến. Trong luận án, tư tưởng chính là xét xem lớp hàm phân hình khi tổng số khuyết đối với nó là cực đại.

Đối tượng nghiên cứu là các ánh xạ phân hình có tổng số khuyết cực đại và các ánh xạ phân hình nhiều biến phụ thuộc đại số.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp nghiên cứu và kỹ thuật truyền thống của Giải tích phức nhiều biến, lý thuyết Nevanlinna. Đồng thời, chúng tôi cũng sáng tạo ra những kỹ thuật mới nhằm giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án. Thứ nhất là khi nghiên cứu về tổng số khuyết cực đại của các hàm phân hình, chúng tôi đã nghĩ ra cách "nhiễu" chúng bằng những hàm "nhỏ". Thứ hai là khi nghiên cứu về vấn đề duy nhất của các ánh xạ phân hình thì các tác giả thường chứng minh trực tiếp và thông qua định lý cơ bản thứ hai. Ở đây, chúng tôi tiếp cận vấn đề bằng lý thuyết về "sự phụ thuộc đại số" của các ánh xạ phân hình nhiều biến do W. Stoll đề xuất.

4. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Trong số những định lý mà R. Nevanlinna đã chứng minh, định lý về quan hệ số khuyết giữ một vai trò đặc biệt. Cụ thể, định lý được phát biểu như sau:

Định lý A [9] *Nếu f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ thì* $\sum\limits_{a\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \delta(a, f) \leq 2.$

Định lý A cũng được chứng minh cho lớp hàm phân hình nhiều biến phức. Chẳng hạn, định lý Cartan-Nochka nói rằng nếu $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\{H_j\}_{j=0}^{q-1}$ là các siêu phẳng ở vị trí N-tổng quát dưới trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thì $\sum_{i=0}^{q-1} \delta^{[n]}(H_i, f) \leq 2N - n + 1$. Có một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Ta có thể nói gì về lớp hàm f mà tổng số khuyết đối với nó là cực đại? Nói cách khác, ta có thể nói gì về dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức số khuyết? Vấn đề trên đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong thời gian vừa qua. Chẳng hạn, năm 2003 N. Toda đã chứng minh định lý sau:

Định lý B([21, Theorems 5.1, 6.1] và [24, Theorems 3.1, 4.1]) *Giả sử* $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính và* $\{H_j\}_{j=1}^q$ *là các siêu phẳng ở vị trí N-tổng quát dưới trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, *ở đó* $1 \leq n < N$ *và* $2N - n + 1 < q \leq +\infty$. *Giả sử* $\delta(H_j, f) > 0$ $(1 \leq j \leq q)$ *và* $\sum_{j=1}^q \delta^{[n]}(H_j, f) = 2N - n + 1$. *Khi đó, một trong hai phát biểu sau đây là đúng:*

(I) Có ít nhất $\left[\dfrac{2N-n+1}{n+1}\right] + 1$ *siêu phẳng* H_j *trong số q siêu phẳng trên mà tại đó f có giá trị số khuyết bằng 1, tức là* $\delta(H_j, f) = 1$,

(II) $\{H_j\}_{j=1}^q$ *có phân bố Borel.*

Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, trong hai chương đầu của luận án chúng tôi nghiên cứu về lớp ánh xạ phân hình có tổng số khuyết là cực đại. Cụ thể, trong chương 1 chúng tôi đã chỉ ra một số tính chất liên quan đến những hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại, đồng thời cũng chỉ ra rằng lớp hàm phân hình đó là rất nhỏ. Cụ thể, chúng tôi đã chứng minh 2 định lý sau:

Định lý 1.3.1 *Giả sử* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *là một hàm phân hình với bậc hữu hạn. Với mỗi* $n \geq 1$, *ta đặt* $g_n(z) = f(z^n)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ *và* $h_n(z) = f^n(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. *Khi đó,* $\lambda := \rho_f \in \mathbb{Z}^+$ *và* λ *bằng bậc dưới của f nếu có một trong hai điều kiện sau:*

(i) Tồn tại $n_0 \geq 2$ *sao cho* $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, g_{n_0}) = 2$.

(ii) Tồn tại một dãy $\{n_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset \mathbb{Z}^+$ *sao cho* $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, h_{n_i}) = 2$ *với mọi* $i \geq 1$.

Định lý 1.3.2 *Giả sử* $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *là một hàm phân hình có bậc hữu hạn thỏa mãn*

$$\lambda := \rho_f \notin \mathbb{Z} \quad \text{và} \quad \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) = 2.$$