BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

Nguyễn Thị Thảo

KÌ DỊ TẠI VÔ HẠN CỦA ÁNH XẠ ĐA THỨC THỰC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC LOJASIEWICZ SUY RỘNG

Chuyên ngành: Hình học và Tôpô
Mã số: 62.46.10.01

DỰ THẢO LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. PGS. TSKH. HÀ HUY VUI
2. GS. TSKH. PIERRETTE CASSOU - NOGUÈS

Hà Nội - 2011

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, dưới sự đồng hướng dẫn khoa học của PGS. TSKH. Hà Huy Vui và GS. TSKH. Pierrette Cassou - Noguès. Các kết quả được phát biểu trong luận án là mới, trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của tác giả nào khác. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự đồng ý của các tác giả khi đưa vào luận án.

Tác giả

Nguyễn Thị Thảo

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TSKH. Hà Huy Vui. Thầy là người tận tâm, tận tình, dành nhiều công sức dẫn dắt tác giả thực sự bước vào nghiên cứu khoa học, động viên, khích lệ tác giả vượt lên những khó khăn trong học tập và cuộc sống. Tác giả xin được bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với Thầy.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình đến người thầy thứ hai GS. TSKH. Pierrette Cassou - Noguès vì sự tận tình và sự cảm thông đối với những khó khăn của tác giả.

Trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án, tác giả luôn nhận được sự quan tâm, động viên, giúp đỡ của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp trong bộ môn Hình học, các thầy cô và các bạn đồng nghiệp trong Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, các thành viên của Phòng Hình học - Tôpô, Viện Toán học. Nhân đây, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành trước những quan tâm đó.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn tới Ban giám hiệu Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Phòng Khoa học và Công nghệ, Phòng Sau đại học của Trường đã tạo những điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập, công tác và hoàn thành luận án này.

Cuối cùng, luận án sẽ không thể hoàn thành nếu thiếu sự cảm thông, giúp đỡ của những người thân trong gia đình. Tác giả xin được gửi tới toàn thể người thân trong gia đình lời cảm ơn chân thành và sâu sắc.

Tác giả

MỤC LỤC

MỘT SỐ QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU

Trong toàn bộ luận án, ta thống nhất một số kí hiệu như sau.

(1) $\mathbb{N}$: tập các số tự nhiên.

(2) $\mathbb{R}$: tập các số thực.

(3) $\mathbb{R}^*$: tập các thực khác không.

(4) $\mathbb{C}$: tập các số phức.

(5) max: giá trị lớn nhất.

(6) min: giá trị nhỏ nhất.

(7) inf: cận dưới đúng.

(8) sup: cận trên đúng.

(9) lim: giới hạn.

(10) deg: bậc.

(11) dim: chiều.

(12) rank: hạng.

(13) det: định thức.

(14) grad: gradient.

(15) $\sharp$: lực lượng tập hợp.

(16) χ: đặc trưng Euler-Poincaré.

(17) $|.|$: giá trị tuyệt đối của số thực.

(18) $\langle , \rangle$: tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^n$.

(19) $\|.\|$: chuẩn Euclid thông thường trên $\mathbb{R}^n$.

(20) $d(,)$: khoảng cách Euclid thông thường trên $\mathbb{R}^n$.

(21) $\bar{.}$: bao đóng tập hợp với tôpô thông thường trong $\mathbb{R}^n$.

(22) $\mathbb{B}_r^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2\}$.

(23) $\mathbb{S}_r^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2\}$.

(24) $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$.

MỞ ĐẦU

I. Lý do chọn đề tài

Các tập đại số là một trong những đối tượng nghiên cứu cơ bản nhất của Toán học. Lớp các tập đại số được nghiên cứu nhiều nhất là các tập phức và các tập thực. Chúng được chia thành bốn loại:

- Các tập đại số xạ ảnh phức;
- Các tập đại số xạ ảnh thực;
- Các tập đại số affine phức;
- Các tập đại số affine thực.

Các kết quả mang tính nền tảng của Lefschetz S., Zariski O., Milnor J.,... và nhiều người khác đã đem đến những hiểu biết sâu sắc về các tính chất tôpô, cấu trúc đại số,... của các tập đại số xạ ảnh phức ([46], [43], [13], [9],...).

So với tập đại số xạ ảnh phức, các tập đại số xạ ảnh thực là đối tượng khó nghiên cứu hơn. Chỉ khoảng 50 năm trở lại đây, với các công trình cơ bản của Petrowsky, Arnold, Rokhlin,... về sự sắp xếp các oval của những đường cong phẳng xạ ảnh thực không kì dị, việc nghiên cứu các tập xạ ảnh thực bắt đầu hòa vào dòng phát triển chung và đang trở thành một lĩnh vực sôi động với nhiều kết quả đặc sắc ([15], [33], [16],...).

Các tập đại số *affine*, cả phức lẫn thực, là đối tượng đặc biệt khó nghiên cứu. Người ta vẫn hiểu rất ít về các tập affine phức, mặc dù các tập này thu hút được sự chú ý của rất nhiều chuyên gia Hình học đại số và Hình học tôpô như Dimca [10], Fary [44], Némethi [50], Malgrange [49], Phạm F. [51], Lê Dũng Tráng [54],...

Những hiểu biết về tập đại số affine thực lại còn ít hơn nữa. Ở đây, nhiều bài toán tự nhiên, ngay cả với các đường cong affine thực, vẫn chưa có câu trả lời.

Trong luận án, chúng tôi muốn tìm hiểu các tính chất tôpô của một số lớp các tập đại số affine thực.

II. Đối tượng, phạm vi, mục đích nghiên cứu

Mỗi tập đại số affine thực (tương ứng, phức) V là tập không điểm của một hệ các phương trình đa thức, tức là có dạng $V = f^{-1}(0)$, trong đó f là một ánh xạ đa thức từ $\mathbb{R}^n$ đến $\mathbb{R}^k$ (tương ứng, từ $\mathbb{C}^n$ đến $\mathbb{C}^k$).

Từ một kết quả rất tổng quát của Thom R. [53], mỗi ánh xạ đa thức f từ tập đại số không kì dị V_1 sang tập đại số không kì dị V_2 xác định một phân thớ tầm thường địa phương lớp C^∞ ngoài một tập đại số con $B(f) \subset V_2$. Đó là phân thớ Milnor toàn cục. Tập $B(f)$ được gọi là tập các giá trị rẽ nhánh của f. Có thể thấy rằng tập $B(f)$ chứa tập các giá trị tới hạn $\Sigma(f)$ của f. Nếu V_1 không compact, ở đây xuất hiện một hiện tượng mới, mà ta không gặp khi nghiên cứu trường hợp xạ ảnh, đó là hiện tượng *kì dị tại vô hạn*. Nói chung, $B(f) \neq \Sigma(f)$, và các điểm thuộc $B_\infty(f) := B(f)\backslash\Sigma(f)$ được gọi là các *giá trị tới hạn của kì dị tại vô hạn*. Nói một cách vắn tắt, có hai nguyên nhân để f không xác định một phân thớ tầm thường quanh thớ $f^{-1}(t)$, $t \in B(f)$:

- Hoặc phân thớ này không tầm thường trong lân cận điểm kì dị, tức là $t \in \Sigma(f)$;
- Hoặc phân thớ này không tầm thường trong lân cận điểm vô hạn, tức là với mọi lân cận D của t, mọi $r > 0$, ánh xạ

  $$f : f^{-1}(D)\backslash\mathbb{B}_r^n \to D$$

  không phải là một phân thớ tầm thường.

Tổng kết lại, để hiểu tôpô của các tập đại số affine $f^{-1}(t)$, ta cần hiểu phân thớ Milnor toàn cục

$$f : V_1\backslash f^{-1}(B(f)) \to V_2\backslash B(f).$$

Để hiểu phân thớ Milnor toàn cục, ta phải hiểu tập $B(f)$. Đến đây, xuất hiện bài toán tự nhiên và quan trọng:

Đặc trưng các giá trị tới hạn của kì dị tại vô hạn của f, tức là bao giờ thì một giá trị $t \in V_2$ cho trước thuộc vào tập $B_\infty(f) = B(f) \setminus \Sigma(f)$?

Bài toán này là đối tượng khảo sát chính của luận án.

Mặc dù bài toán đặc trưng các giá trị tới hạn của kì dị tại vô hạn được nghiên cứu rất tích cực trong 20-30 năm nay, nó vẫn còn là một bài toán mở. Người ta chỉ biết câu trả lời cho một số trường hợp riêng:

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ (Suzuki [52], Hà Huy Vui - Lê Dũng Tráng [58], Hà Huy Vui - Nguyễn Lê Anh [57], Hà Huy Vui [56]).
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Coste - de la Puente [8]).
- $f : V \to \mathbb{R}$ là hạn chế của hàm đa thức trên một mặt đại số trơn không compact V trong $\mathbb{R}^n$ (Tibar - Zaharia [31]).
- $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, với điều kiện f chỉ có kì dị cô lập tại vô hạn (Parusinski [23]).
- $f : V \to \mathbb{C}$, trong đó $V \subset \mathbb{C}^n$ là mặt đại số không kì dị và f là ánh xạ thỏa mãn điều kiện tồn tại "phép chiếu tốt" (Hà Huy Vui - Nguyễn Tất Thắng [39]).
- $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$, với điều kiện tồn tại "phép chiếu tốt" đối với f (Hà Huy Vui - Nguyễn Tất Thắng [40]).

Mục đích nghiên cứu của luận án là đặc trưng tập các giá trị tới hạn của kì dị tại vô hạn, hoặc tìm hiểu sâu hơn về nó cho các tình huống hình học sau.

1. Các ánh xạ đa thức từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^n$: Chúng tôi tìm điều kiện để tập các giá trị tới hạn của kì dị tại vô hạn của một ánh xạ đa thức $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là tập trống (cũng có nghĩa là, F là ánh xạ riêng). Chú ý rằng, vấn đề này liên quan đến bài toán Jacobi nổi tiếng.

2. Hạn chế của một hàm hữu tỉ thực lên một mặt đại số không kì dị trong $\mathbb{R}^n$: Chúng tôi đưa ra một bất biến cho phép đặc trưng trọn vẹn các