ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ VĂN TUẤN

VẬN DỤNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN $\mathbb{N}$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học: **PGS. TS. ĐÀM VĂN NHỈ**

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

Mở đầu

Phương trình hàm là một vấn đề khó, nhưng được nhiều người quan tâm. Phương trình hàm thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia và đề thi quốc tế. Trong quá trình dạy học, chúng tôi cũng đã giải hoặc xây dựng một vài phương trình hàm. Luận văn đặt vấn đề xây dựng một số phương trình hàm trên tập $\mathbb{N}$ qua một số kết quả đã đạt được trong Đại số tuyến tính.

Bài toán xác định những hàm số $f(x)$ thoả mãn một số tính chất $T_1, \ldots, T_n$ nào đó được gọi là *phương trình hàm. Giải phương trình hàm* tức là tìm tất cả những hàm $f(x)$ thoả mãn tất cả những tính chất $T_1, \ldots, T_n$. Khi giải phương trình hàm, với mỗi tính chất T_k ta tìm cách tiến dần đến hàm số cần tìm. Với hàm số tìm được ta kiểm tra lại xem nó có thoả mãn tất cả những tính chất T_k hay không? Thường giải phương trình hàm được đưa về giải hệ phương trình hay một dãy truy hồi. Từ những kết quả đã đạt được về đa thức hoặc hàm liên tục ta có thể dễ dàng giải được bài toán. Trong luận văn này chúng tôi sử dụng một số kết quả của đại số tuyến tính vào xây dựng phương trình hàm trên tập tự nhiên $\mathbb{N}$. Nội dung luận văn này gồm có hai chương:

Chương I, trình bày khái niệm ma trận và phép toán, định thức và các tính chất của định thức, đại số $Matn(K)$, các ma trận vuông cấp $\mathbb{N}$, vectơ riêng, giá trị riêng, vành ma trận, ma trận nghịch đảo, phương trình đặc trưng của ma trận, chéo hoá ma trận vuông.

Chương II, trình bày khái niệm giá trị riêng của hàm ma trận, xét dãy truy hồi qua phép nhân ma trận, ứng dụng xây dựng và giải phương trình hàm trên tập $\mathbb{N}$.
Luận văn có sử dụng một số phương trình hàm của thầy giáo hướng dẫn.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ - Đại học Sư Phạm Hà Nội. Em xin được bày tỏ

lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và chỉ bảo hướng dẫn của Thầy. Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy, Cô trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học. Đồng thời tôi xin cảm ơn tới Sở Giáo dục - Đào tạo Quảng Ninh, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Cô Tô - Huyện Cô Tô đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 8 năm 2013

Tác giả

Ngô Văn Tuấn

Chương 1

Ma trận

1.1 Ma trận và định thức

1.1.1 Ma trận và phép toán

Định nghĩa 1.1.1. *Một bảng gồm m.n số được viết thành m dòng, n cột như sau:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

được gọi là một ma trận kiểu (m, n).

Mỗi số a_{ij} được gọi là một thành phần của ma trận. Nó nằm ở dòng thứ i và cột thứ j.

Ta thường kí hiệu ma trận bởi các chữ in hoa: A, B ... Có thể viết ma trận (1.1) một cách đơn giản bởi

$$A = (a_{ij})_{(m,n)}$$

Khi đã biết rõ m và n thì còn có thể viết là $A = (a_{ij})$.

Nếu ma trận chỉ có một dòng (một cột) thì ta gọi nó là ma trận dòng (ma trận cột).

Nếu $m = n$ thì ma trận được gọi ma trận vuông cấp n và viết

$$A = (a_{ij})_{(n)}.$$

Định nghĩa 1.1.2. *Ta gọi ma trận*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển vị của ma trận (1.1) và kí hiệu là ${}^tA$.

Như vậy ma trận ${}^tA$ thu được từ A bằng cách đổi dòng thứ i của A thành cột thứ i của ${}^tA$ và nếu A là ma trận kiểu (m, n) thì ma trận chuyển vị ${}^tA$ là ma trận kiểu (n, m).

Các phép toán trên các tập ma trận

Ta đã biết trên tập hợp $Hom_K(V, W)$ có phép cộng hai ánh xạ tuyến tính và phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một số. Hơn nữa, khi đã cố định hai cơ sở của V và W, ta có song ánh

$$\Phi : Hom_K(V, W) \longrightarrow Mat_{(m,n)}(K).$$

Bây giờ ta muốn định nghĩa các phép toán trên các ma trận sao cho "phù hợp" với các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính. Chẳng hạn ma trận của tổng hai ánh xạ phải bằng tổng hai ma trận của những ánh xạ ấy.

Phép cộng hai ma trận

Mệnh đề và định nghĩa: *Giả sử* $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ *và* $B = (b_{ij})_{(m,n)}$ *lần lượt là các ma trận của ánh xạ tuyến tính* $f, g \in Hom_K(V, W)$ *đối với hai cơ sở* (ε) *và* (ξ) *đã chọn trong* V *và* W*. Thế thì ma trận của ánh xạ tuyến tính* $f + g$ *đối với hai cơ sở ấy là* $C = (a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}$.
Ma trận C *được gọi là tổng của hai ma trận* A *và* B *kí hiệu là* $A + B$

Chứng minh. Theo giả thiết

$$f(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\xi}_i, g(\vec{\varepsilon})_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\vec{\varepsilon}_i, \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Do đó: $(f+g)(\vec{\varepsilon}_j) = f(\vec{\varepsilon}_j) + g(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\xi}_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij}+b_{ij})\vec{\xi}_i$, với mọi $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vậy ma trận của $f+g$ đối với hai cơ sở đã cho là $(a_{ij}+b_{ij})_{(m,n)}$. □

Quy tắc cộng ma trận: *Muốn cộng hai ma trận ta chỉ việc cộng các thành phần tương ứng (cùng dòng, cùng cột) của chúng:*

$$(a_{ij})_{(m,n)} + (b_{ij})_{(m,n)} = (a_{ij}+b_{ij})_{(m,n)}.$$

Phép nhân ma trận với một số

Mệnh đề và định nghĩa: *Giả sử $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f \in Hom_K(V, W)$ đối với hai cơ sở (ε) và (ξ) đã chọn trong V và W, $k \in K$. Thế thì ma trận của ánh xạ tuyến tính f.g đối với hai cơ sở ấy là $C = (ka_{ij})_{(m,n)}$.*
Ma trận C được gọi là tích của hai ma trận A với số k, kí hiệu là kA.

Quy tắc nhân ma trận với một số: *Muốn nhân một ma trận A với một số k ta chỉ việc nhân số k với mọi thành phần của A.*

Phép trừ hai ma trận

Định nghĩa 1.1.3. *Ma trận $(-1)A$ được gọi là đối của ma trận A. Kí hiệu là $-A$. Với ma trận A và B, tổng A + (-B) được gọi là hiệu của A và B. Kí hiệu là A - B.*

Như vậy, với A $= (a_{(ij)})_{(m,n)}$ và B $= (b_{ij})_{(m,n)}$ ta có: $-B = (-b_{ij})_{(m,n)}$, $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{(m,n)}$

Tích của hai ma trận

Mệnh đề 1.1.1. *Giả sử trong mỗi không gian U, V, W đã chọn một cơ sở cố định, $A = (a_{(ij)})_{(m,n)}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính*

$$f : V \longrightarrow W, B = (b_{(ij)})_{(n,p)}$$

là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : U \longrightarrow V$. Thế thì ma trận của ánh xạ tuyến tính fg là ma trận

$$C = (c_{(ik)})_{(m,p)}, \text{ trong đó } c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}b_{jk})$$

Ma trận C được gọi là tích của hai ma trận A và B, kí hiệu là AB.

Chứng minh. Giả sử $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1\vec{\varepsilon}_2 \dots \vec{\varepsilon}_p\}$ là cơ sở của U,
$(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n\}$ là cơ sở của V, $(\xi) = \{\vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_m\}$ là cơ sở của W.
Theo định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính, ta có:

$$f(\xi_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\zeta}_i, g(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\vec{\xi}_j, fg(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{i=1}^{m} c_{ik}\vec{\zeta}_i.$$

Do đó

$$fg(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} f(\vec{\xi}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{jk} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\zeta}_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})\vec{\zeta}_i.$$

Vậy:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ik}\vec{\zeta}_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})\vec{\zeta}_i.$$

Vì hệ (ζ) độc lập tuyến tính nên $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$. □

Quy tắc nhân hai ma trận: *Muốn tìm thành phần c_{ik} của một ma trận tích AB ta phải lấy mỗi thành phần a_{ij} của dòng thứ i trong ma trận A nhân với thành phần b_{jk} của cột thứ k của ma trận B rồi cộng lại.*

Chú ý.

1) Theo định nghĩa tích AB chỉ được xác định khi số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B.

2) Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

Mệnh đề 1.1.2. *Với các ma trận A, B, C và mọi số $k \in K$, ta có các đẳng thức sau (nếu các phép toán có nghĩa):*

1) *Tính kết hợp:* $(AB)C = A(BC)$;

2) *Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:*
$A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$;

3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

1.1.2 Định thức và tính chất của định thức

Định nghĩa 1.1.4. *Với ma trận vuông*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ta gọi tổng

$$D = \sum_{s \in S_{(n)}} sgn(s) a_{1s_{(1)}} a_{2s_{(2)}} \dots a_{is_{(i)}} \dots a_{ns_{(n)}}$$

là định thức của ma trận A và kí hiệu bởi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hay $|A|$ hay $det(A)$.
Trong cách kí hiệu này ta cũng nói mỗi a_{ij} là một thành phần, các thành phần $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ tạo thành dòng thứ i, các thành phần $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ tạo thành cột thứ j của định thức. Khi ma trận A có cấp n ta cũng nói $|A|$ là một định thức cấp n.

Ta thấy, mỗi hạng tử của định thức cấp n là một tích của n thành phần cùng với một dấu xác định, trong mỗi tích không có hai thành phần nào cùng dòng hoặc cùng cột.

Tính chất 1.1.1. *Nếu định thức*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{ij} + a''_{ji} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mà mọi thành phần ở dòng thứ i đều có dạng $a_{ij} = a_{ij}^{'} + a_{ij}^{"}$ *thì*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{'} & a_{i2}^{'} & \dots & a_{ij}^{'} & \dots & a_{in}^{'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{''} & a_{i2}^{''} & \dots & a_{ij}^{''} & \dots & a_{in}^{''} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh. Kí hiệu hai định thức ở vế phải lần lượt là D' và D''.

Theo định nghĩa định thức ta có:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\sigma \in S_{(n)}} sgn(\sigma) a_{1\sigma_{(1)}} a_{2\sigma_{(2)}} \dots (a^{'}{}_{i\sigma_{(i)}} + a^{''}{}_{i\sigma_{(i)}}) \dots a_{n\sigma_{(n)}} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{(n)}} sgn(\sigma) a_{1\sigma_{(1)}} \dots a^{'}{}_{i\sigma_{(i)}} \dots a_{n\sigma_{(n)}} \\ &+ \sum_{\sigma \in S_{(n)}} sgn(\sigma) a_{1\sigma_{(1)}} \dots a^{"}{}_{i\sigma_{(i)}} \dots a_{n\sigma_{(n)}} \\ &= D' + D''. \end{aligned}$$

□

Tính chất 1.1.2. *Nếu mọi thành phần ở dòng thứ i của định thức có thừa số chung c thì có thể đặt c ra ngoài dấu định thức, tức là:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{ij} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh. Kí hiệu định thức ở vế trái bởi D', ở vế phải bởi D, ta có:

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{\sigma \in S_{(n)}} sgn(\sigma) a_{1\sigma_{(1)}} \dots ca_{i\sigma_{(i)}} \dots a_{n\sigma_{(n)}} = \sum_{\sigma \in S_{(n)}} sgn(\sigma) a_{1\sigma_{(1)}} \dots a_{n\sigma_{(n)}} \\ &= cD. \end{aligned}$$

□