ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ MINH TIẾN

CỰC TRỊ
CỦA MỘT SỐ HÀM NHIỀU BIẾN
CÓ CÁC DẠNG ĐẶC BIỆT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

LÊ MINH TIẾN

CỰC TRỊ
CỦA MỘT SỐ HÀM NHIỀU BIẾN
CÓ CÁC DẠNG ĐẶC BIỆT

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : **60460113**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. HOÀNG VĂN HÙNG

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

Lời nói đầu

Các bài toán cực trị là một trong những vấn đề quan trọng của cả toán học cao cấp lẫn toán học sơ cấp. Trong chương trình toán sơ cấp ở bậc phổ thông trung học, giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của các hàm một biến hoặc nhiều biến trên một miền nào đó được tìm bằng một trong các phương pháp sau đây:

- Dùng đạo hàm khảo sát hàm số trên miền đã cho (đối với hàm một biến).

- Dùng lý thuyết về tam thức bậc hai (phương pháp miền giá trị).

- Sử dụng các bất đẳng thức khác nhau.

Các bài toán tìm giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của hàm nhiều biến (theo thuật ngữ của toán cao cấp) rất thường hay xuất hiện ở câu hỏi phân loại của các đề thi tuyển sinh đại học và cao đẳng môn Toán học (xem đề thi tuyển sinh đại học môn Toán các khối A,B,D từ năm 2002 đến năm 2012). Để giải các bài toán này thường phải vận dụng phương pháp thứ ba (phương pháp dùng bất đẳng thức), hai phương pháp đầu hầu như không phát huy tác dụng. Vì vậy, để nâng cao khả năng giải các bài toán cực trị của các hàm nhiều biến, học sinh phải rèn luyện rất nhiều về các bất đẳng thức. Các bất đẳng thức mà học sinh phổ thông thường sử dụng là bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Cauchy –Schwarz (hay còn gọi là bất đẳng thức Bunhiacovski). Các bất đẳng thức này có các dạng tổng quát khác nhau, chẳng hạn tổng quát hơn bất đẳng thức Cauchy là bất đẳng thức Cauchy suy rộng, tổng quát hơn bất đẳng thức Cauchy - Schwarz là bất đẳng thức Holder.

Tác giả Phan Huy Khải (xem [P.H.Khải1]) đã sử dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng để tìm cực tiểu của một lớp các hàm nhiều biến mà tác giả gọi là các phân thức chính quy. Theo hướng này, trong [H.V. Hùng 1] tác giả Hoàng Văn Hùng đã dùng bất đẳng thức Holder để tìm giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của một lớp các hàm nhiều biến có dạng tỉ số của hai phân thức đồng dạng. Hướng nghiên cứu này cho thấy mỗi một bất đẳng thức chứa nhiều biến hầu như cho khả năng kết luận về cực trị của một lớp nào đó các hàm nhiều biến. Vấn đề là các lớp hàm đưa ra phải đủ đơn giản về dạng để dễ nhận biết, có như vậy người sử dụng mới có thể nhớ và vận dụng được linh hoạt.

Bản luận văn **"Cực trị của một số hàm nhiều biến có các dạng đặc biệt"** nghiên cứu một số bất đẳng thức chứa nhiều biến và đưa ra kết luận tương ứng về giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của một số lớp hàm nhiều biến có dạng đặc biệt. Nội dung của bản luận văn gồm Lời nói đầu, 03 chương và Phần kết luận:

Chương 1: Một số các bất đẳng thức cổ điển

Chương 2: Cực trị của một số hàm nhiều biến dạng đặc biệt

Chương 3: Cực trị của các hàm của hai đa thức đối xứng hai biến

Trong chương 1 tác giả đưa ra các bất đẳng thức cổ điển Cauchy, Bunhiacovski, Holder, Mincowski cùng với một số hệ quả và mở rộng của chúng. Tất cả các bất đẳng thức được đưa ra đều được chứng minh chặt chẽ, theo cách ngắn gọn nhất mà tác giả biết.

Chương 2 dành cho các định lý về giá trị bé nhất của các phân thức k– chính quy, giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm có dạng tỷ số của hai phân thức đồng dạng, suy rộng kết quả cho tỷ số của các hàm một biến có dạng đặc biệt, giá trị bé nhất và lớn nhất của các hàm nửa cộng tính. Sau mỗi định lý đều có các ví dụ minh hoạ lấy từ các đề tuyển sinh đại học môn Toán của các khối A, B, D từ năm 2002 đến 2012 và một số tài liệu tham khảo về các bài toán cực trị, bất đẳng thức. Tất cả các định lý đều được chứng minh chặt chẽ.

Chương 3 dành cho việc xét bài toán giá trị bé nhất và lớn nhất của các hàm hai biến biểu diễn được qua các đa thức đối xứng của hai biến $u = x + y$ và $v = xy$. Tác giả đã đưa ra và chứng minh hai định lý về giá trị bé nhất và lớn nhất của các hàm dạng này. Một số ví dụ minh hoạ cho áp dụng của các định lý của chương này được lấy từ các đề tuyển sinh đại học môn Toán của các khối A, B, D từ năm 2002 đến 2012. Các ví dụ khác do tác giả sáng tác.

Phần tài liệu tham khảo gồm 07 tài liệu.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thày hướng dẫn TS. Hoàng Văn Hùng, Viện Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam, thầy đã tận tình hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình chuẩn bị luận văn.

Tác giả cũng xin chân thành cám ơn các thày cô công tác tại: Trường Đại học khoa học, Trường Đại học sư phạm, Khoa công nghệ thông tin- Đại học Thái Nguyên, Trường Đại học khoa học- Đại học Quốc gia Hà Nội, Trường Đại học sư phạm Hà Nội, Trường Đại học Hải Phòng, Viện Công nghệ Thông tin, Viện Toán học- Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã rất quan tâm và tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành chương trình học tập bậc cao học trong suốt thời gian qua.

Hải Phòng, ngày 10 tháng 5 năm 2013

Tác giả

Lê Minh Tiến

Chương 1

Một số các bất đẳng thức cổ điển

Chương này chứng minh một số các bất đẳng thức cổ điển như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacovski, bất đẳng thức Holder và các mở rộng của chúng. Các chứng minh đưa ra trong chương này không giống các cách chứng minh truyền thống của các bất đẳng thức nêu trên trong các sách phổ thông về chủ đề bất đẳng thức.

1.1 Bất đẳng thức Cauchy và các hệ quả

Mệnh đề 1.1.1: Với mọi số thực x ta có bất đẳng thức $e^x \geq x+1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 0.

Chứng minh. Xét hàm $f(x) = e^x - x - 1$ ta có $f'(x) = e^x - 1, f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$. Khi x $<$ 0 ta có $f'(x) < 0$, khi x $>$ 0 ta có $f'(x) > 0$. Vậy f(x) đạt cực tiểu thực sự và toàn cục tại x = 0. Ta có f(0) = 0. Vậy $f(x) \geq 0$ với mọi số thực x, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=0. Khẳng định này tương đương với bất đẳng thức $e^x \geq x+1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 0.

Định lý 1.1.2 (bất đẳng thức Cauchy): Nếu x_i (i =1,2,..,n) là n số dương thì:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Chứng minh. Đặt $A = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i,\ G = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}$. Áp dụng khẳng định của mệnh đề 1.1.1 với x = $\dfrac{x_i}{A} - 1$ (i = 1,..,n) ta có: $e^{\frac{x_i}{A}-1} \geq \dfrac{x_i}{A}$ (dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x_i}{A} = 1 \leftrightarrow x_i = A$).

Vì các x_i đều là các số dương nên từ bất đẳng thức trên ta suy ra:

$$\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{x_i}{A}-1} \geq \prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{A}) = \frac{G^n}{A^n} \leftrightarrow e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{A}-n} \geq \frac{G^n}{A^n} \leftrightarrow 1 = e^{n-n} \geq \frac{G^n}{A^n}$$

$$\leftrightarrow A^n \geq G^n \leftrightarrow A \geq G \leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x_i =A với mọi i $\leftrightarrow$ tất cả các x_i phải bằng nhau.

Tiếp theo ta ký hiệu $\mathbf{R}_+^{*n}$ là tập hợp các véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ của $\mathbf{R}^n$ mà mọi thành phần x_i đều dương, $\mathbf{Q}_+^{*n}$ là tập con của $\mathbf{R}_+^{*n}$ mà mọi thành phần của các véc tơ thuộc nó đều là các số hữu tỉ dương. Ta sẽ gọi mỗi véc tơ thuộc $\mathbf{Q}_+^{*n}$ là một véc tơ hữu tỷ dương n- chiều. Hàm thực n biến f(x)= f $(x_1, ..., x_n$) gọi là liên tục tại điểm x* = $(x_1^*, ..., x_n^*) \in \mathbf{R}^n$ nếu x* thuộc tập xác định của f(x) và với mọi dãy $\{\xi_k = (\xi_{1k}, ..., \xi_{nk})\}$ nằm trong tập xác định của f(x) thoả mãn:

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{ik} = x_i^* \quad (\forall i \in \{1, ..., n\}) \quad (1.1)$$

ta luôn có $\lim\limits_{k\to\infty} f(\xi_k) = f(x^*)$. Khi (1.1) đúng ta nói dãy $\{\xi_k = (\xi_{1k}, ..., \xi_{nk})\}$ hội tụ tới x* và ký hiệu $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = x^*$.

Nếu D là một tập con của tập xác định của f(x) và f(x) liên tục tại mọi x $\in$D ta nói f(x) liên tục trên D. Một véc tơ $p = (p_1, ..., p_m) \in \mathbf{R}_+^{*m}$ gọi là một hệ trọng lượng chuẩn nếu $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$. Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.1.3: Giả sử F(p,x), G(p,x) là hai hàm xác định trên $\mathbf{R}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$ và liên tục theo biến p trên $\mathbf{R}_+^{*m}$ với mỗi x cố định $\in \mathbf{R}_+^{*n}$. Khi đó:

1) Nếu bất đẳng thức F(p,x) $\geq$ G(p,x) đúng với mọi (p,x) $\in \mathbf{Q}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$ thì nó cũng đúng với mọi (p,x) $\in \mathbf{R}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$.

2) Nếu bất đẳng thức F(p,x) $\geq$ G(p,x) đúng với mọi cặp (p,x) $\in \mathbf{Q}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$ trong đó p là một hệ trọng lượng chuẩn thì nó cũng đúng với mọi cặp (p,x) $\in \mathbf{R}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$ trong đó p là một hệ trọng lượng chuẩn.

Chứng minh. 1) Giả sử (p*,x*) là một cặp tuỳ ý thuộc $\mathbf{R}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$. Tồn tại một dãy $\{p_k\}$ các véc tơ hữu tỷ dương sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p^*$. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$F(p_k,x^*) \geq G(p_k,x^*) \text{ với mọi k nguyên dương.} \quad (1.2)$$

Cho k dần tới vô cực trong (1.2) và dùng tính liên tục của các hàm F, G theo biến p ta được điều cần chứng minh: F(p*,x*) $\geq$ G(p*,x*).

2) Chứng minh hoàn toàn tương tự như phần 1). Chỉ cần nhận xét rằng nếu p* là một hệ trọng lượng chuẩn tuỳ ý thì bao giờ cũng tồn tại một dãy các hệ trọng lượng chuẩn gồm toàn các véc tơ hữu tỷ dương $\{p_k\}$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p^*$.

Định lý 1.1.4 (bất đẳng thức Cauchy suy rộng):

Giả sử x= $(x_1, x_2 ... x_n)$ là một véc tơ thuộc $\mathbf{R}_+^{*n}$ và $p = (p_1, \ldots, p_n)$ là một hệ trọng lượng chuẩn. Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \quad (1.3)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức (1.3) đúng với mọi hệ trọng lượng chuẩn hữu tỷ. Giả sử p_i là các số hữu tỷ dương sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Quy đồng mẫu số chung cho tất cả các p_i ta có thể xem $p_i = \dfrac{m_i}{m}$ trong đó $m_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ và m là các số nguyên dương thoả mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = m$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho m số dương: m_1 số x_1, m_2 số x_2 ,..., m_n số x_n ta được:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \geq \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m} x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i/m} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$$

Vậy (1.3) đúng với mọi cặp (p,x) $\in \mathbf{Q}_+^{*n} \times \mathbf{R}_+^{*n}$. Đặt F(p,x) $= \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i$, G(p,x) $= \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$

Rõ ràng F(p,x) và G(p,x) là các hàm liên tục theo $p = (p_1, \ldots, p_n)$ trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ với mỗi x cố định thuộc $\mathbf{R}_+^{*n}$. Áp dụng khẳng định 2) của mệnh đề 1.1.3 ta suy ra tính đúng đắn của bất đẳng thức Cauchy suy rộng (1.3).

Mệnh đề 1.1.5: Nếu $x_j (j = 1, 2, ..., k)$ là các số dương thoả mãn $\prod\limits_{j=1}^{k} x_j = 1$ và $\alpha/\beta > 1$ thì:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^{\alpha} \geq \sum_{j=1}^{k} x_j^{\beta} \quad (1.4)$$

Nhận xét: Bất đẳng thức (1.4) cho câu trả lời khẳng định đối với câu hỏi đặt ra bởi tác giả Lê Thống Nhất trong bài báo "Những suy nghĩ ban đầu về đề thi tuyển sinh đại học môn Toán năm 2001" (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 8/2001)

Chứng minh. Chứng minh bất đẳng thức (1.4) được chia làm hai bước:

i) Bước 1: Ta sẽ chứng minh rằng nếu m, n là các số nguyên dương và m>n thì:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^{m/n} \geq \sum_{j=1}^{k} x_j \quad (1.5)$$

Với mỗi j $\in \{1, 2, ..., k\}$ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho m số dương: n số bằng $x_j^{m/n}$ và m − n số bằng 1 ta có:

$$n x_j^{m/n} + m - n \geq m x_j \quad (j = 1, 2, ..., k) \quad (1.6)$$

Đặt $A = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j^{m/n}$, cộng các vế của k bất đẳng thức trong (1.6) rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho k số dương $x_j (j = 1, 2, ..., k)$ (chú ý $\prod\limits_{j=1}^{k} x_j = 1$) ta suy ra:

$$\begin{aligned} nA + k(m-n) &\geq m \sum_{j=1}^{k} x_j = n \sum_{j=1}^{k} x_j + (m-n) \sum_{j=1}^{k} x_j \\ &\geq n \sum_{j=1}^{k} x_j + k(m-n) \rightarrow A \geq \sum_{j=1}^{k} x_j \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (1.5) đúng, tức bất đẳng thức (1.4) đúng với α là số hữu tỷ $\alpha = \dfrac{m}{n}$, m, n là các số nguyên dương, m > n và $\beta = 1$