

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ THƠM

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ THƠM

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.0113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS-TSKH HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn	1
Lời nói đầu	2
Một số ký hiệu và chữ viết tắt	2
1 Kiến thức cơ bản	4
1.1 Một số tính chất đặc trưng của hàm số	4
1.2 Các phương trình hàm cơ bản	6
2 Một số phương pháp giải phương trình hàm	11
2.1 Phương pháp quy nạp	11
2.2 Phương pháp sử dụng các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh và đơn điệu của hàm số	14
2.3 Phương pháp dự đoán nghiệm và chứng minh nghiệm tìm được là duy nhất	16
2.4 Phương pháp thay thế giá trị cho các biến	19
2.5 Phương pháp chuyển qua giới hạn	21
2.6 Phương pháp chuyển về bài toán xác định dãy số	24
2.7 Phương pháp điểm bất động	26
2.8 Phương pháp chuyển về phương trình hàm Cauchy	28

2.9	Phương pháp sử dụng các tính chất của đạo hàm, nguyên hàm, tích phân	29
2.10	Phương pháp thêm biến	31
2.11	Phương pháp tổng hợp	34
Kết luận		39
Tài liệu tham khảo		40

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành luận văn này, em xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH Hà Huy Khoái, người thầy đã tận tình dạy bảo, hướng dẫn em trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Em xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy giáo, cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2011-2013. Em cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Phòng đào tạo, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Đồng thời em xin trân trọng cảm ơn Sở giáo dục và đào tạo thành phố Hải Phòng, trường THPT Toàn Thắng, gia đình và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ về mọi mặt trong suốt quá trình em học tập và hoàn thành luận văn.

Hải Phòng, tháng 05 năm 2013.

Tác giả

Vũ Thị Thơm

LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình hàm là phương trình có chứa ẩn dưới dạng hàm số chưa biết. Giải phương trình hàm là tìm hàm số chưa biết từ phương trình hàm đã cho.

Lý thuyết phương trình hàm là một trong những lĩnh vực nghiên cứu quan trọng của lý thuyết số và giải tích toán học. Các dạng toán về phương trình hàm rất phong phú, bao gồm các phương trình tuyến tính, phương trình hàm một ẩn hoặc nhiều ẩn...

Phương trình hàm cũng là một chuyên đề quan trọng bồi dưỡng học sinh khá giỏi bậc trung học phổ thông. Các bài toán về phương trình hàm thường có trong các đề thi học sinh giỏi toán trong và ngoài nước. Tuy nhiên, cho đến nay học sinh các trường chuyên lớp chọn nói riêng và người giải toán nói chung còn biết rất ít các phương trình chính thống để giải phương trình hàm, thậm chí còn lúng túng không biết định hướng khi tiếp cận một phương trình hàm.

Mục đích của luận văn là dựa trên việc tìm hiểu các phương trình hàm cũng như một số tài liệu liên quan đến phương trình hàm để hình thành phương pháp phân tích, khai thác các dữ liệu, dự đoán hướng giải, các kỹ thuật biến đổi,...trên cơ sở đó hình thành một số phương pháp giải phương trình hàm.

Nội dung luận văn gồm 2 chương:

- **Chương 1:** *Kiến thức cơ bản:* Trong chương này trình bày một số tính chất đặc trưng của hàm số và các phương trình hàm cơ bản.
- **Chương 2:** *Một số phương pháp giải phương trình hàm.*

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

Với mọi x được viết là $\forall x$

Tập các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N}$

Tập các số nguyên được ký hiệu là $\mathbb{Z}$

Tập các số hữu tỉ được ký hiệu là $\mathbb{Q}$

Tập các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$

Chương 1

Kiến thức cơ bản

1.1 Một số tính chất đặc trưng của hàm số

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định là $D(f) \subset \mathbf{R}$ và tập giá trị $\mathbf{R}(f) \subset \mathbf{R}$.

1.1.1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa 1.1.1.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên M , $M \subset D(f)$, nếu $\forall x \in M$ ta có $-x \in M$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M , $M \subset D(f)$, nếu $\forall x \in M$ ta có $-x \in M$ và $f(-x) = -f(x)$.

1.1.2. Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 1.1.2.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số đồng biến trên tập $N \subset D(f)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in N, x_1 \neq x_2$, thì ta có $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số nghịch biến trên tập $N \subset D(f)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in N, x_1 \neq x_2$, thì ta có $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$.

- Hàm số đồng biến và nghịch biến trên tập N gọi chung là hàm đơn điệu trên tập N .

1.1.3. Hàm số liên tục

Định nghĩa 1.1.3.

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ được xác định tại điểm x_0 . Ta nói rằng $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) .
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) và đồng thời liên tục phải tại a , liên tục trái tại b , có nghĩa:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b). \end{cases}$$

1.1.4. Hàm số khả vi (Tính có đạo hàm của hàm số)

Định nghĩa 1.1.4.

- Cho hàm số $f(x)$, $x_0 \in D(f)$. Ta nói $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Giới hạn đó kí hiệu là $f'(x_0)$ và được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0 . Khi đó, ta cũng nói $f(x)$ khả vi tại x_0 .
- Hàm số $f(x)$ được gọi là khả vi trên tập $D \subset D(f) \Leftrightarrow f(x)$ khả vi tại mọi điểm thuộc $D \Leftrightarrow f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc D .

1.1.5. Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Hàm tuần hoàn cộng tính.

Định nghĩa 1.1.5.1.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ a ($a > 0$) trên M nếu $M \subset D(f)$ và $\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x + a) = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$

- Cho $f(x)$ là một hàm tuần hoàn trên M . Khi đó $T (T > 0)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T mà không là hàm tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T .

Hàm phản tuần hoàn cộng tính.

Định nghĩa 1.1.5.2.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ $b (b > 0)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và
$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm b \in M \\ f(x + b) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$
- Nếu $f(x)$ là một hàm phản tuần hoàn chu kỳ b_0 trên M mà không là hàm phản tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn b_0 trên M thì b_0 được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$ trên M .

1.1.6. Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.1.6.1.

- $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ $a (a \notin \{0, 1, -1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và
$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.1.6.2.

- $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ $a (a \notin \{0, 1, -1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và
$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

1.2 Các phương trình hàm cơ bản

1.2.1. Phương trình hàm cơ bản 1 (Phương trình hàm Cauchy)

Bài toán 1: Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Bài giải:

Cho $x = 0, y = 0$ từ (1) ta được $f(0) = 0$. (2)

Cho $x = -y$, từ (1) suy ra $f(-x) = -f(x)$. (3)