ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————————

PHẠM TRUNG KIÊN

ĐƯỜNG CONG PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————————

PHẠM TRUNG KIÊN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS-TS: ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Đã từ lâu, người ta rất quan tâm đến những phương trình kiểu $x^2 + y^2 = z^2$ hay $x^3+y^3 = z^3$ với x, y, z nguyên. Việc giải các bài toán này khi $z \neq 0$ cũng chính là việc tìm các điểm hữu tỷ trên đường cong phẳng $x^2 + y^2 = 1$ hay $x^3 + y^3 = 1$. Chính vì vậy một vấn đề nẩy sinh là xác định các điểm hữu tỷ trên đường cong phẳng. Để có thể xác định được hầu hết các điểm hữu tỷ, người ta thường tham số hóa đường cong phẳng trong $\mathbb{R}^2$.

Một vấn đề nữa cũng được nhiều người quan tâm là: Một kết quả trong hình học đúng cho đường tròn thì còn đúng cho đường elip, hypecbol, parabol không? Để có được kết quả đúng cho đường conic thì các hệ thức phải có các hệ số tương ứng kèm theo.

Vấn đề thứ ba là: Mô tả một tập hợp điểm trong hình học phẳng không phải cứ dùng thước kẻ và compa là dựng được. Khi đó muốn tìm quỹ tích các điểm trong mặt phẳng ta có thể mô tả qua đường cong phẳng.

Với ba vấn đề đặt ra ở trên luận văn này tập trung nghiên cứu về đường cong phẳng và mở rộng một vài kết quả đã biết từ lâu. Luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Trình bày một vài kiến thức chuẩn bị về nhóm, vành đa thức, kết thức và biệt thức.

Chương 2. Tập trung trình bày về đường cong phẳng. Mục 2.1 trình bày khái niệm đường cong phẳng. Chúng tôi đã chứng minh được mệnh đề 2.1.2. về giao hữu hạn điểm của hai đường cong phẳng. Mục 2.2 trình bày việc tham số hóa các đường conic và một vài đường cong phẳng khác. Chúng tôi tham số hóa theo kiểu phân thức hữu tỷ để áp dụng vào xác định điểm hữu tỷ trên đường cong phẳng. Cạnh đó chúng tôi cũng tham số hóa hàm lượng giác để chuyển một vài kết quả từ đường tròn sang elip. Mục 2.3 chúng tôi trình bày một phương pháp xác định điểm hữu tỷ trên đường conic. Mục 2.4 trình bày cấu trúc nhóm trên đường cong bậc ba không có điểm kỳ dị. .

Chương 3. Một số ứng dụng

Mục 3.1 trình bày một vài bài hình sơ cấp qua tham số hóa. Trong mục này tôi đã sử dụng tham số hóa để giải quyết một số bài toán tập hợp điểm mà quỹ tích của chúng là một đường cong phẳng bậc ba. Mục 3.2 đưa ra cách giải một vài phương trình nghiệm nguyên sử dụng phương pháp tham số hóa. Mục 3.3 trình bày về khái niệm và một vài tính chất của phép biến hình N_{ab}. Trong mục này tôi trình bày định lý Ptolemy và định lý Newton đối với đường tròn. Từ kết quả này sử dụng phép biến hình N_{ab} phát hiện ra một số kết quả tương tự cho elip. Mục 3.4 tôi trình bày một số bài toán về đường cong phẳng bậc ba đặc biệt là bài toán đường cong phẳng 21- điểm K_3.

Đích cuối cùng luận văn muốn đạt được là:

1. Kết thức và phép khử với những tính chất cơ bản và ứng dụng.

2. Đường cong phẳng trong mặt phẳng và một vài tính chất.

3. Tham số hóa đường cong phẳng và sử dụng tham số hóa đường cong phẳng trong một số bài toán về phương trình nghiệm nguyên, điểm hữu tỷ và một số bài hình sơ cấp.

4. Phương pháp tìm điểm hữu tỷ trên đường conic và cấu trúc nhóm trên đường cong phẳng bậc ba không kỳ dị.

5. Trình bày phép biến hình N_{ab} và một vài tính chất.

6. Bài toán đường cong phẳng 21 - điểm K_3.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ . Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy. Em xin cảm ơn chân thành tới Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn căn bản sau đại học. Tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian tác giả học cao học và viết luận văn.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 5 năm 2013

Người viết

Phạm Trung Kiên

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Nhóm

Giả sử X là một tập khác rỗng. Xét tích $X \times X = \{(a, b) \,|a, b \in X\}$. Một ánh xạ $* : X \times X \to X$ được gọi là một *phép toán hai ngôi* trên X. Giả thiết $*$ là một phép toán hai ngôi trên X. Phép toán $*$ được gọi là có tính chất *kết hợp* nếu $(a * b) * c = a * (b * c)$ thỏa mãn cho mọi $a, b, c \in X$. Phép toán $*$ được gọi là có tính chất *giao hoán* nếu $a * b = b * a$ thỏa mãn cho mọi $a, b \in X$. Giả sử A là một tập con của X. Tập A được gọi là *ổn định* với phép toán $*$ nếu $a * b \in A$ với mọi $a, b \in A$.

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử tập $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $*$. Phần tử $e \in X$ được gọi là phần tử *trung hòa* nếu $a * e = e * a = a$ thỏa mãn cho mọi $a \in X$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho tập $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $*$ và phần tử trung hòa e. Giả sử phần tử $a \in X$. Phần tử $b \in X$ được gọi là phần tử *ngược* của a nếu $a * b = b * a = e$.

Định nghĩa 1.1.3. Cho tập $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $*$ và phần tử trung hòa e. Giả sử phần tử $a \in X$. Phần tử $b \in X$ được gọi là phần tử ngược của a nếu $a * b = b * a = e$ và ta nói a có phần tử ngược là b.

Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi kết hợp $*$ mà có phần tử trung hòa e thì phần tử e là duy nhất và nếu phần tử $a \in X$ có phần tử ngược $b \in X$ thì b cũng là duy nhất.

Định nghĩa 1.1.4. Cho tập $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $*$. X được gọi là một *nhóm* nếu X cùng phép toán $*$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) X có phần tử trung hòa e.

(ii) Phép toán $*$ có tính chất kết hợp, có nghĩa: $(a*b)*c = a*(b*c)$ thỏa mãn cho mọi $a, b, c \in X$.

(iii) Mọi phần tử $a \in X$ đều có phần tử ngược, có nghĩa: Có $b \in X$ để $a*b = b*a = e$.

Nhóm X với phép toán $*$ được gọi là nhóm *giao hoán* nếu $x*y = y*x$ thỏa mãn cho mọi phần tử $x, y \in X$.

Nếu phép toán hai ngôi $*$ trên nhóm X được kí hiệu bởi phép cộng $+$ thì thay cho việc viết $a*b$ ta viết $a+b$ và được gọi là *tổng* của a và b. Nhóm $(X, +)$ gọi là *nhóm cộng*. Phần tử trung hòa e của nhóm này là *phần tử không* và được kí hiệu là 0. Phần tử ngược của a được gọi là *phần tử đối* và kí hiệu qua $-a$. Do vậy $a - a = a + (-a) = 0$.

Nếu phép toán hai ngôi $*$ trên nhóm X được kí hiệu bởi phép nhân . thì thay cho việc viết $a*b$ ta viết $a.b$ hoặc viết đơn giản ab và gọi là *tích* của a và b. Nhóm $(X, .)$ được gọi là *nhóm nhân*. Phần tử trung hòa e của nhóm này được gọi là *phần tử đơn vị* và được kí hiệu là e. Phần tử ngược của a được gọi là *phần tử nghịch đảo* và được kí hiệu qua a^{-1}. Do vậy $aa^{-1} = e$.

1.2 Vành đa thức và nghiệm đa thức

1.2.1 Khái niệm vành đa thức

Giả sử R là vành giao hoán với đơn vị 1. Kí hiệu $P \subset R^{\mathbb{N}}$ là tập hợp tất cả các dãy $f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0...)$ với các $a_i \in R$ và chỉ có một số hữu hạn thành phần khác 0. Như vậy phần tử thuộc P hoặc có dạng$(0, 0, ..., 0, 0, ...)$ hoặc $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$ với thành phần cuối cùng $a_n \neq 0$. Ta đưa phép toán vào P để biến P thành một vành. Với $f = (a_0, ..., a_n, 0, ...)$, $g = (b_0, ..., b_m, 0, ...) \in P$, định nghĩa:

$f = g$ khi và chỉ khi $a_i = b_i, i = 0, 1, 2, ...$

$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_k + b_k, ..., 0, ...)$

$f.g = (a_0b_0, a_1b_0 + a_0b_1, a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, ..., 0, ...)$

Bổ đề 1.2.1. *Tập* $(P, +, .)$ *là một vành giao hoán với đơn vị* $(1, 0, 0, ...)$ *và ánh xạ* $\phi : R \to (P, +, .)\,, a \mapsto (a, 0, 0, ...)$ *là một đơn cấu.*

Chứng minh: Dễ dàng kiểm tra các kết quả trên.

Đặt $x = x^1 = (0, 1, 0, 0, ...)$ và quy ước $x^0 = (1, 0, 0, ...)$. Ta có biểu diễn

$$\begin{aligned}
&x^0 = (1, 0, 0, ...)\\
&x = (0, 1, 0, 0, ...)\\
&x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, ...)\\
&x^3 = (0, 0, 0, 1, 0...)\\
&... = ...\\
&f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)\\
&= (a_0, 0, 0, ...) + (0, a_1, 0, 0, ...) + ... + (0, 0, ..., 0, a_n, 0, ...)\\
&= (a_0, 0, ...)\, x^0 + (a_1, 0, ...)\, x + ... + (a_n, 0, 0, ...)\, x^n
\end{aligned}$$

Nếu đồng nhất $a \in R$ với ảnh $\phi\,(a) = (a, 0, 0, ...)\,, x^0 = (1, 0, 0, ...) = \phi\,(1)$ ta có biểu diễn $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Lúc này vành $(P, +, .)$ được kí hiệu qua $R[x]$ và ta có

$$R\,[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n\,|a_i \in R\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\,|a_i \in R\right\}$$

Mỗi phần tử $f \in R\,[x]$ được gọi là một *đa thức* của x với các hệ số a_i thuộc vành R. Hệ số $a_n \neq 0$ được gọi là *hệ số cao nhất*, còn hệ số a_0 được gọi là *hệ số tự do* của f, n được gọi là *bậc* của đa thức f và kí hiệu là $degf(x)$. Riêng đa thức 0 được quy định có bậc là $-\infty$ hoặc -1. Vì tính chất đặc biệt của x nên đôi khi ta gọi x là một *biến* trên R và đa thức f còn được viết qua $f(x)$.

Nếu $f\,(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ix^i, g\,(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_ix^i \in K\,[x]$ thì

$f(x) = g(x)$ khi và chỉ khi $m = n, a_i = b_i$ với $0 \leq i \leq n$

$f\,(x) + g\,(x) = \sum\limits_{i=0} (a_i + b_i)\, x^i, f\,(x)\, g\,(x) = \sum\limits_{i=0} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} (a_{i-j}b_j)\right) x^i$

Ta có các kết quả sau đây:

Định lý 1.2.2. *Với trường* K, $K[x]$ *là một vành giao hoán. Hơn nữa,* $K[x]$ *còn là một miền nguyên.*

Định lý 1.2.3. *Với các đa thức* $f(x), g(x) \in K[x]$ *và* $g(x) \neq 0$ *có hai đa thức duy nhất* $q(x), r(x)$ *sao cho* $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ *với* $degr(x) < degg(x)$.

Định lý 1.2.4. *Giả sử K là một trường. Khi đó vành* $K[x]$ *là một vành chính và nó là vành nhân tử hóa.*

Ví dụ 1.2.5. *Cho hai số tự nhiên* n *và* p *với* $n > p \geq 1$. *Tìm điều kiện cần và đủ để* $x^n - a^n$ *chia hết cho* $x^p - a^p$ *với* $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Bài giải: Biểu diễn $n = qp + r$ trong $\mathbb{Z}$ với $0 \leq r < p$. Khi đó có thể viết

$$x^n - a^n = (x^p - a^p)\left(x^{n-p} + a^p x^{n-2p} + ... + a^{(q-1)p} x^{n-qp}\right) + a^{qp}\left(x^r - a^r\right).$$

Vậy, điều kiện cần và đủ để $x^n - a^n$ chia hết cho $x^p - a^p$ là n chia hết cho p.

Giả sử trường K là trường con của trường K^*. Với $\alpha \in K^*$ và đa thức $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i \in K[x]$. Biểu thức $f(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \alpha^i \in K^*$ được gọi là *giá trị* của $f(x)$ tại α trong K^*. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì α được gọi là một *nghiệm* của $f(x)$ trong K^*. Giả sử số nguyên $m \geq 1$. Phần tử $\alpha \in K^*$ được gọi là một *nghiệm bội cấp m* của $f(x)$ trong K^* nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x-\alpha)^{m+1}$ trong $K^*[x]$. Khi $m = 1$ thì α được gọi là *nghiệm đơn*.

Định lý 1.2.6. *Đa thức* $f(x) \in K[x]$ *bậc* $n \geq 1$. *Khi đó ta có kết quả sau:*
(i) Nếu $\alpha \in K$ *là nghiệm của* $f(x)$ *thì* $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ *với* $g(x) \in K[x]$.
(ii) $f(x)$ *có không quá n nghiệm trong K.*

1.3 Kết thức và biệt thức

Kết thức của hai đa thức được biết đến và ứng dụng mạnh mẽ trong đại số máy tính. Nó đặc trưng cho việc xác định tính chất đặc trưng của hai đa thức một biến trên trường K có nghiệm chung thông qua hệ số của hai đa thức đó mà không đòi hỏi phải tìm nghiệm của chúng. Kết thức là công cụ đáng ngạc nhiên trong việc giải quyết các bài toán về hệ phương trình đại số.

1.3.1. Khái niệm kết thức

Giả sử $u_0, u_1, ..., u_m$ và $v_0, v_1, ..., v_n$ là một họ gồm $m + n + 2$ biến độc lập đại số