ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐÌNH XUÂN

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên-2013

MỤC LỤC

Mở đầu

Chúng ta ai cũng biết rằng, có nhiều phương pháp khác nhau để giải một bài toán. Sử dụng phương pháp nào để cách giải tự nhiên và qua đó có thể nhìn thấy cách xây dựng bài toán mới không quá tầm thường. Đặc biệt trong Hình học sơ cấp, khi sử dụng hình vẽ để trình bày lời giải một bài hình ta khó có thể vận dụng một số kết quả của Đại số và Giải tích. Hơn nữa, có một số bài toán hình mà ta không thể vẽ được kết quả, chẳng hạn một vài bài quỹ tích. Rất tự nhiên xuất hiện câu hỏi: Chọn phương pháp nào để trình bày một bài hình, mở rộng bài hình, xây dựng bài hình mới. Vì những lí do ở trên nên chúng tôi đã chọn " Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng" để trình bày một số kết quả hình học sơ cấp.

Liên quan đến cách chọn phương pháp tọa độ là hai câu hỏi trong lĩnh vực Toán sơ cấp.

(1) Tại sao chỉ cần sử dụng một mặt phẳng và một mặt nón đủ tạo ra một đường côníc? Nói một cách khác: Ta cần hệ hai phương trình đa thức $f(x,y,z)$ $=g(x,y,z)=0$ đã đủ mô tả tất cả các điểm thuộc đường côníc. Câu hỏi này gắn liền với vấn đề nổi tiếng do Perron đặt ra: Số cực tiểu các đa thức đủ mô tả một đường cong phẳng.

(2) Xác định tất cả các điểm hữu tỷ trên một đường cong phẳng thế nào? Nói một cách khác: Giải phương trình Diophante $f(x,y)=0$ trên Q.

Đặc biệt, phương pháp tọa độ cho phép chúng ta sử dụng một vài kết quả của Đại số, Giải tích và Số học vào xây dựng một bài hình sơ cấp. Tham số hoá một vài đường cong phẳng qua các hàm hữu tỷ để chúng ta biểu diễn đường công đó qua *không điểm tổng quát*. Việc đưa phần tử ∞ vào R để ta có thể vét hết các điểm thuộc một đường coníc. Việc sử dụng ma trận và định thức để chúng ta phát hiện kết quả hình học không qua kẻ vẽ.

Cấu trúc của luận văn: Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia ra làm hai chương

Chương 1: Trình bày về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Bao gồm Mục 1 được trình bày phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Mục 2 tập trung trình bày phương trình một vài đường, chẳng hạn: Đường thẳng và đường bậc hai; tham số hoá một số đường. Còn Mục 3 trình bày việc sử dụng phương pháp tọa độ để chứng minh một số định lý nổi tiếng trong hình học.

Chương 2: Xây dựng một số bài toán Đại số và Hình học sơ cấp. Bao gồm Mục 1 sử dụng tọa độ để ứng dụng Bài toán con bướm cho các đường côníc. Mục 2 xây dựng một số bài toán Đại số và Hình học. Mục 3 là một vài phương trình đường có chứa tham số . Mục 4 nêu bài toán véc tơ liên quan đến tam giác.

Mặc dù đã có rất nhiều cố gắng cho luận văn nhưng chắc chắn nội dung trình bày trong luận văn không trách khỏi những hạn chế và thiếu sót nhất định và em rất mong nhận được sự chỉ bảo, hướng dẫn của các thầy giáo, cô giáo và sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp để luận văn của em được hoàn chỉnh và có ý nghĩa thiết thực hơn.

Qua đây em xin bày tỏ lòng biết ơn đến PGS.TS Đàm Văn Nhỉ, người đã tận tình giúp đỡ, động viên và ân cần hướng dẫn, chỉ bảo em hoàn thành luận văn này. Đồng thời em cũng xin chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo trong hội đồng khoa học thuộc Đại học Thái Nguyên, các thầy giáo, cô giáo trực tiếp giảng dạy lớp Cao học toán K5B, cảm ơn trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên nơi em đã được học tập, tiếp nhận một học vấn sau đại học căn bản và cuối cùng, xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian ôn thi, học Cao học và viết luận văn.

Trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày 02 tháng 5 năm 2013

Học viên

Nguyễn Đình Xuân

Chương 1

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

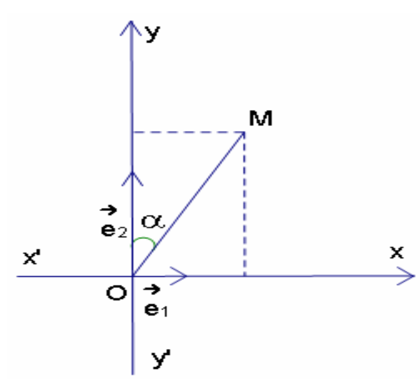
1.1 Phương pháp tọa độ

1.1.1 Sơ lược về phương pháp tọa độ mặt phẳng

Bằng cách đưa vào mặt phẳng một hệ trục toạ độ, mỗi véc tơ, mỗi điểm trên mặt phẳng đó đều được xác định bởi một tọa độ xác định. Vận dụng các kỹ thuật hoặc công thức, quy tắc đã học với những kỹ năng, thao tác và khả năng thực hiện trực tiếp các phép tính, những đơn giản hoá và các lời giải tương tự. Khi đó chúng ta có thể chuyển nhiều bài toán hình học sang bài toán đại số và ngược lại, từ kết quả của đại số suy ra được vài tính chất và mối quan hệ giữa các hình hình học.

1.1.2 Hệ tọa độ trên mặt phẳng.

Định nghĩa: Hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$ gồm hai trục $\left(O;\vec{i}\right)$ và $\left(O;\vec{j}\right)$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc tọa độ. Trục $\left(O;\vec{i}\right)$ được gọi là trục hoành và ký hiệu là Ox, trục $\left(O;\vec{j}\right)$ được gọi là trục tung và ký hiệu là Oy. Các véctơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các véc tơ đơn vị trên Ox, Oy và $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1$. Hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$ còn được ký hiệu là Oxy.



Các định nghĩa:

1. $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{xe_1} + \overrightarrow{ye_2}$.

2. $\vec{a} = (a_1;a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$.

3. $x = OM\cos\alpha$.

4. $y = OM\sin\alpha\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$.

Kết quả quan trọng:

1. Trong mặt phẳng (Oxy) cho $\vec{a}(a_1;a_2), \vec{b}(b_1;b_2)$, ta có $\vec{a}$ và $\vec{b}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 .$$

2. Trong mặt phẳng (Oxy) cho $\vec{a}(a_1;a_2), \vec{b}(b_1;b_2)$

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = (a_1,a_2).(b_1,b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$.

1.2 Phương trình đường thẳng và đường bậc hai và tham số hoá các đường

Phương trình đường thẳng

Các dạng phương trình đường thẳng: Với $a,b \in R$ và $a^2+b^2 \neq 0$, ta có

(i) $d: ax+by+c=0$.

(ii) $t: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$.

(iii) Đường thẳng AB: $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_2=0$ với $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$

(iv) Đường thẳng AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ với $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$

(*v*) *Giả sử* d_1*:* $a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$. Khi đó tọa độ giao điểm

$$A = d_1 \text{ x } d_2 \text{ với } x_A = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y_A = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}.$$

Góc giữa d_1 và d_2 là α với $\tan\alpha = \left|\dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right| = \left|\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|$

và $\sin\alpha = \dfrac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}$, $\cos\alpha = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}$.

Giả sử tam giác ABC có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$. Khi đó diện tích

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \text{ gttđ } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Phương trình các đường thẳng chứa các đỉnh :

$$\text{BC: } a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_1 = y_2 - y_3 \\ b_1 = x_3 - x_2 \\ c_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \end{cases}$$

$$\text{CA: } a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_2 = y_3 - y_1 \\ b_2 = x_1 - x_3 \\ c_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \end{cases}$$

$$\text{AB: } a_3x + b_3y + c_3 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_3 = y_1 - y_2 \\ b_3 = x_2 - x_1 \\ c_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \end{cases}$$

Nếu giải hệ phương trình, ngượi lại để tính x_i, y_i qua các a_j, b_j, c_j ta có

$$x_1 = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, y_1 = \frac{a_3c_2 - a_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$x_2 = \frac{b_3c_1 - b_1c_3}{a_3b_1 - a_1b_3}, y_2 = \frac{a_1c_3 - a_3c_1}{a_3b_1 - a_1b_3}$$

$$x_3 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y_3 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Phương trình đường bậc hai

Mệnh đề 1.2.1: Nếu 3 đỉnh tam giác ABC là những giao điểm của các cặp thuộc ba đường thẳng $a_i x + b_i y + c_i = 0$ với $i = 1,2,3$, thì diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔABC được tính theo các công thức

$$(i)\ S_{ABC} = \frac{1}{2} gtt\text{đ} \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

$$\textit{(ii) } R = gtt\text{đ}\ (ii)\ R = gtt\text{đ} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{(a_1{}^2 + b_1{}^2)(a_2{}^2 + b_2{}^2)(a_3{}^2 + b_3{}^2)}}{2}.$$

(iii) Nếu kí hiệu a =BC, b = CA, c = AB thì

$$abc = gtt\text{đ} \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^3 \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Chứng minh: *(i)* Thay x_i, y_i vào công thức tính diện tích tam giác ABC ta nhận được:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \text{gtt}\text{đ} \begin{vmatrix} \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} & \frac{a_3c_2 - a_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2} & 1 \\ \frac{b_3c_1 - b_1c_3}{a_3b_1 - a_1b_3} & \frac{a_1c_3 - a_3c_1}{a_3b_1 - a_1b_3} & 1 \\ \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} & \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}gttđ\begin{vmatrix} \frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2} & \frac{a_3c_2-a_2c_3}{a_2b_3-a_3b_2} & 1 \\ \frac{b_3c_1-b_1c_3}{a_3b_1-a_1b_3} & \frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_3b_1-a_1b_3} & 1 \\ \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} & \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}gttđ\frac{\begin{vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & a_3c_2-a_2c_3 & a_2b_3-a_3b_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 & a_1c_3-a_3c_1 & a_3b_1-a_1b_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 & a_2c_1-a_1c_2 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Xét ma trận cấp ba $M=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ và ma trận phụ hợp của M là

$$M_{ad}=\begin{pmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & a_3c_2-a_2c_3 & a_2b_3-a_3b_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 & a_1c_3-a_3c_1 & a_3b_1-a_1b_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 & a_2c_1-a_1c_2 & a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Vì $M\,M_{ad}=|M|E$ nên $|M|\,|M_{ad}|=|M|^3$ hay $|M_{ad}|=|M|^2$. Do vậy ta có

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}gttđ\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

(ii) Vì $R^2=\dfrac{S_{ABC}}{2\sin A\sin B\sin C}$ nên ta có công thức xác định R qua

$$R^2=\frac{1}{2}gtt\text{đ}\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\;2\frac{|a_1b_2-a_2b_1|\,|a_2b_3-a_3b_2|\,|a_3b_1-a_1b_3|}{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^3+b_3^3)}}.$$

Do vậy $R=gtt\text{đ}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\frac{\sqrt{(a_1{}^2+b_1{}^2)(a_2{}^2+b_2{}^2)(a_3{}^2+b_3{}^2)}}{2}.$

(iii) Ta có $abc=gtt\text{đ}\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^3\sqrt{(a_1{}^2+b_1{}^2)(a_2{}^2+b_2{}^2)(a_3{}^2+b_3{}^2)}}{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}$

vì $abc=4RS_{ABC}$.

Biểu diễn bán kính đường tròn ngoại tiếp qua tọa độ đỉnh

Mệnh đề 1.2.2. Giả sử ba điểm $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ và $C(x_3;y_3)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với độ dài ba cạnh *a = BC, b = CA, c = AB*. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có $R=\frac{abc}{2gttd\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}}$

Chứng minh: Ta biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không thay đổi qua một phép tịnh tiến. Do đó có thể coi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $O(0;0)$ và ta có