ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Quốc Khánh

NGHỊCH LÝ " TĂNG KHỐI LƯỢNG ĐỂ GIẢM CHI PHÍ" TRONG BÀI TOÁN VẬN TẢI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Quốc Khánh

NGHỊCH LÝ " TĂNG KHỐI LƯỢNG ĐỂ GIẢM CHI PHÍ" TRONG BÀI TOÁN VẬN TẢI

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.16.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS-TS Trần Vũ Thiệu**

Thái Nguyên - 2013

LỜI NÓI ĐẦU

Bài toán vận tải của qui hoạch tuyến tính có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Trong bài toán này có tồn tại nghịch lý "Tăng khối lượng hàng vận chuyển để giảm chi phí vận chuyển", gọi tắt là ngịch lý "Tăng để giảm", nghĩa là khi tăng lượng cung của một trạm phát nào đó thêm một lượng hàng $\alpha > 0$ và đồng thới tăng lượng cầu của một trạm thu nào đó cũng thêm một lượng hàng α đó thì chi phí vận chuyển tổng cộng lại giảm đi so với chi phí vận chuyển lúc trước khi tăng. Cần tìm hiểu lý do xảy ra và giải thích về mặt lý thuyết tại sao có nghịch lý này.

Mục tiêu của luận văn này là tìm hiểu tại sao tăng lượng hàng vận chuyển lại có thể giảm được chi phí vận chuyển trong bài toán vận tải. Tìm điều kiện để nghịch lý "tăng để giảm" xảy ra và điều kiện đảm bảo nghịch lý này không thể xảy ra.

Luận văn gồm lời nói đầu, ba chương, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1
BÀI TOÁN QUI HOẠCH THAM SỐ

Chương này nhắc lại một số kết quả về bài toán qui hoạch tuyến tính và bài toán vận tải phụ thuộc tham số ở vế phải ràng buộc. Nêu tính chất của hàm giá trị tối ưu của bài toán có vế phải phụ thuộc tuyến tính vào một tham số và nêu ví dụ về bài toán vận tải với lượng cung và cầu phụ thuộc tham số.

1.1. BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH THAM SÔ

Bài toán qui hoạch tuyến tính với vế phải ràng buộc phụ thuộc tham số có dạng:

(Q(t))
$$z(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + td_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \tag{1.3}$$

trong đó a_{ij}, c_j, b_i, d_i là các hệ số cho trước và t là tham số. z(t) xác định theo (1.1) gọi là *hàm mục tiêu,* mỗi đẳng thức (1.2) gọi là một *ràng buộc chính* của bài toán. Giả thiết $t_{min} \le t \le t_{max}$ với t_{min}, t_{max} là hai số thực cho trước (có thể $t_{min} = -\infty$, $t_{max} = +\infty$).

Đặt A là ma trận hệ số a_{ij} (i = 1, ... , m, j = 1, ... , n), $x = (x_1, x_2, ... , x_n)^T$ là véctơ cột các biến; $c = (c_1, c_2, ... , c_n)^T$, $b = (b_1, ... , b_m)^T$ và $d = (d_1, ... , d_m)^T$. Bài toán qui hoạch tham số Q(t) có thể viết gọn lại như sau:

$$\min \{c^T x : Ax = b + t.d, x \geq 0\}. \quad (1.4)$$

Với t cố định, véctơ x(t) thỏa mãn các ràng buộc (1.2) - (1.3) gọi là một *phương án* của bài toán Q(t). Phương án đạt giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu (1.1), gọi là một *phương án tối ưu* hay *lời giải* của bài toán. Tập các phương án của Q(t) gọi là *tập ràng buộc* hay *miền chấp nhận được* và ký hiệu là D(t). Ta giả thiết $D(t_{min}) \neq \emptyset$.

Phương án của Q(t) mà đồng thời là một đỉnh của D(t) gọi là một phương án cực biên. Một cơ sở của phương án cực biên tối ưu của Q(t) ứng với một giá trị t cho trước gọi là *cơ sở tối ưu*. Tập hợp tất cả các giá trị t sao cho cơ sở đã cho là tối ưu gọi là *khoảng tối ưu* của cơ sở đó.

Theo lý thuyết qui hoạch tuyến tính tham số, giá trị tối ưu z*(t) là một hàm lồi, tuyến tính từng khúc theo t và tồn tại một số hữu hạn giá trị

$$-\infty = t_{-p} < \ldots < t_{-1} < 0 \leq t_1 < \ldots < t_q < t_{q+1} = +\infty$$

sao cho z*(t) là tuyến tính đối với mọi $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $(-p \leq k \leq q)$. Đồng thời, với mỗi k $\in \{-p, q\}$ tồn tại cơ sở B_k là cơ sở tối ưu của bài toán Q(t) với mọi $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Ví dụ 1.1. Giải qui hoạch tuyến tính với vế phải phụ thuộc tham số $t \geq 0$.

$$2x_1 + 3x_2 + 9x_3 \rightarrow \min,$$
$$x_1 \quad + 3x_3 - x_4 \quad = 3 + 2t,$$
$$x_2 + 2x_3 \quad - x_5 = 5 - t,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Dùng qui hoạch tham số giải bài toán trên ta nhận được kết quả như sau:

Tham số t	Phương án tối ưu	Giá trị tối ưu z(t)
$0 \leq t \leq 9/7$	$(0 \;\; \frac{9-7t}{3} \;\; \frac{3+2t}{3} \;\; 0 \;\; 0)$	18 - t
$9/7 \leq t \leq 5$	$(\frac{-9+7t}{2} \;\; 0 \;\; \frac{5-t}{2} \;\; 0 \;\; 0)$	(27 + 5t)/2
$5 \leq t$	$(3 + 2t \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -5 + t)$	6 + 4t

1.2. BÀI TOÁN VẬN TẢI THAM SÔ

Bài toán vận tải phụ thuộc tham số có dạng:

V(t) $$f(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i + t.a'_i, \ i = 1, \dots, m, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j + t.b'_j, \ j = 1, \dots, n, \tag{1.8}$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ với mọi } i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n, \tag{1.9}$$

trong đó $c_{ij} \geq 0$; $a_i > 0$, $a'_i > 0$, $b_j > 0$, $b'_j > 0$ là những hằng số thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ và } \sum_{i=1}^{m} a'_i = \sum_{j=1}^{n} b'_j. \tag{1.10}$$

Bài toán V(t) với điều kiện (1.10) là bài toán vận tải cân bằng thu phát với vế phải ràng buộc phụ thuộc tham số, gọi tắt là *bài toán vận tải tham số*. Tham số t ở vế phải ràng buộc biến thiên trong đoạn $[t_{min}, t_{max}]$, trong đó t_{min}, t_{max} là hai số thực cho trước với $0 \leq t_{min} \leq t_{max}$.

Ta đưa vào các ký hiệu:

$A = (a_{ij})_{(m + n)\times(m.n)}$ - ma trận hệ số các biến ở vế trái các ràng buộc (1.7) - (1.8).

$d = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)^T$ - véctơ vế phải ràng buộc (độc lập với tham số t).

$d' = (a'_1, \dots, a'_m, b'_1, \dots, b'_n)^T$ - véctơ vế phải ràng buộc (hệ số của tham số t).

$c = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn})^T$ - véctơ hệ số mục tiêu.

$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})^T$ - véctơ biến cần tìm.

Khi đó, bài toán V(t) trở thành qui hoạch tuyến tính tham số (xem (1.4)):

$$\min \{c^T x : Ax = d + td', x \geq 0\}.$$

Theo lý thuyết qui hoạch tuyến tính tham số, giá trị tối ưu f(t) của bài toán V(t) là một hàm lồi, tuyến tính từng khúc theo t và tồn tại một số hữu hạn giá trị tham số t

$$0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_q < t_{q+1} = +\infty$$

sao cho f(t) là tuyến tính đối với mọi $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq q)$. Đồng thời, với mỗi $k \in \{0, q\}$ tồn tại một tập ô G_k là cơ sở tối ưu của bài toán V(t) với mọi $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Thuật toán giải V(t) dựa trên phương pháp thế vị quen thuộc đối với bài toán vận tải dạng bảng. Cụ thể như sau.

Bước 0. (Khởi sự)**.** Xuất phát từ giá trị tham số $t_0 = t_{min}$. Do có điều kiện (1.10) nên $Q(t_0)$ có phương án cực biên tối ưu. Chẳng hạn, đó là $x^0 = (x^0_{11}, {}^0_{12}, \dots, x^0_{mn})^T$, tương ứng với tập ô chọn $G_0 = \{(i, j) : x^0_{ij} \text{ là biến cơ sở}\}$. Giả sử x^0 không suy biến, nghĩa là G_0 gồm đúng $(m + n - 1)$ ô và G_0 không chứa chu trình.

Bước 1 (Tìm khoảng tham số tối ưu của G_0). Với lượng cung của các trạm phát là $a_i + t_0 a'_i$ và lượng cầu của các trạm thu là $b_j + t_0 b'_j$, áp dụng qui tắc tam giác vào tập ô chọn G_0, ta nhận được giá trị của biến cơ sở x_{ij} là một hàm tuyến tính của t_0 (các biến phi cơ sở $x^0_{ij} = 0 \ \forall(i, j) \notin G_0$) và

$$x^0_{ij} = p_{ij} + t_0 q_{ij} \geq 0 \text{ với mọi i, j } (p_{ij} = q_{ij} = 0 \ \forall(i, j) \notin G_0).$$

Do $x^0_{ij} \geq 0$ (với mọi i, j) nên hệ bất đẳng thức tuyến tính (phụ thuộc tham số t)

$$x_{ij}(t) = p_{ij} + tq_{ij} = x^0_{ij} + (t - t_0)q_{ij} \geq 0 \qquad (1.11)$$

là tương thích (có nghiệm $t = t_0$).

Nếu mọi $q_{ij} \geq 0$ thì $x(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), \ldots, x_{mn}(t))^T$ là phương án tối ưu của Q(t) với mọi tham số $t \geq t_0$. Nếu trái lại, (có $q_{ij} < 0$) thì x(t) là phương án tối ưu với mọi tham số t thỏa mãn $t_0 \leq t \leq t_1$. Tìm t_1 theo công thức

$$t_1 - t_0 = \min_{q_{ij} < 0} \frac{-x^0_{ij}}{q_{ij}}$$

Rõ ràng phương án (1.11) là tối ưu với mọi t thuộc khoảng

$$t_0 \leq t \leq t_1.$$

Giả sử $t_1 \neq +\infty$. Khi tăng t ($t \geq t_1$) véctơ x(t) với các thành phần $p_{ij} + tq_{ij}$ vẫn thỏa mãn điều kiện tối ưu, nghĩa là mọi ước lượng $\Delta_{ij} \leq 0$. Song véctơ này có thể sẽ không còn là phương án của bài toán đang xét, bởi vì khi tăng t tới một giá trị nào đó, một trong các thành phần

$$x_{ij}(t) = p_{ij} + t.q_{ij}$$

sẽ trở thành âm. Nếu x_{rs} là thành phần đầu tiên bị đổi dấu (từ dương sang âm) thì

$$t_1 = - p_{rs}/q_{rs} = x^0_{ij} + (t - t_0)q_{ij}$$

trong đó $q_{rs} < 0$. Biến x_{rs} sẽ bị loại khỏi cơ sở cũ. Để tìm biến đưa vào cơ sở mới ta cần thực hiện một số thao tác phụ sau:

a) Với mỗi $(i, j) \notin G_0$, xác định hệ số δ_{ij} theo qui tắc: lập chu trình C tạo nên bởi ô (i, j) với các ô thuộc G_0 (chẳng hạn bằng cách loại dần các ô treo trên hàng và cột). Lần lượt phân các ô thuộc C thành các ô lẻ C_1 và ô chẵn C_2 với qui ước $(i, j) \in C_1$. Đặt $\delta_{ij} = 0$ nếu $(r, s) \notin C$, $\delta_{ij} = -1$ nếu $(r, s) \in C_1$ và $\delta_{ij} = 1$ nếu $(r, s) \in C_2$. (δ_{ij} là hệ số khai triển véctơ điều kiện A_{ij} theo các véctơ cơ sở A_{ij} với $(i, j) \in G_0$).

b) Tìm biến đưa vào cơ sở theo qui tắc:

$$\Delta_{pq} = \min\{-\Delta_{ij} : (i, j) \notin G_0, \delta_{ij} = -1\}.$$

Làm như vậy ta sẽ nhận được phương án tối ưu mới của bài toán $Q(t_1)$.

Bước 3. Lặp lại Bước 1 với t_1 thay cho t_0.

1.3. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.2. Xét bài toán vận tải V(t) với các lượng cung và cầu phụ thuộc tham số $t \geq 0$. Dữ liệu bài toán được cho trong bảng sau đây.

a \ b	a' \ b'	40	75	90	125	u_i
		30	0	0	0	
100	0	4 x_{11}	15 x_{12}	18 x_{13}	17 x_{14}	u_1
110	30	5 x_{21}	10 x_{22}	13 x_{23}	12 x_{24}	u_2
120	0	2 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	10 x_{34}	u_3
v_j		v_1	v_2	v_3	v_4	f =

Bảng 1.2. Dữ liệu bài toán vận tải tham số

Dùng qui hoạch tham số giải bài toán vận tải trên, ta nhận được kết quả như sau:

a \ b	a' \ b'	40	75	90	125	u_i
		30	0	0	0	
100	0	4 • **40 + 30t**	15 • **60 - 30t**	18	17	0
110	30	5	10 • **15 + 30t**	13 • **90**	12 • **5**	- 5
120	0	2	14	16	10 • **120**	- 7
v_j		4	15	18	17	f = 3640 - 30t

Bảng 1.3. Cơ sở tối ưu với $0 \leq t \leq 2$

a \ b	a' \ b'	40	75	90	125	u_i
		30	0	0	0	
100	0	4 • **100**	15	18	17	0
110	30	5	10 • **75**	13 • **90**	12 • **-55+30t**	0
120	0	2 • **-60+30t**	14	16	10 • **-30t**	- 2
v_j		4	10	13	12	f = 3340 + 120t

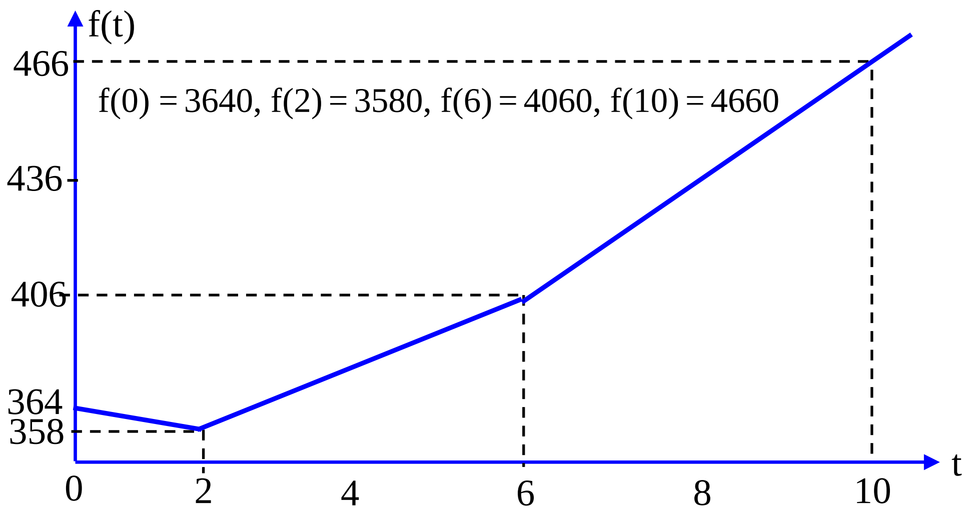
Bảng 1.4. Cơ sở tối ưu với $2 \leq t \leq 6$

a \ **b**, **a'** \ **b'**		40	75	90	125	u_i
		30	0	0	0	
100	0	4 • **100**	15	18	17	0
110	30	5 • **-180+30t**	10 • **75**	13 • **90**	12 • **125**	1
120	0	2 • **120**	14	16	10	- 2
v_j		4	9	12	11	f = 3160 + 150t

Bảng 1.5. Cơ sở tối ưu với $6 \le t < +\infty$

Tham số t	Phương án tối ưu	Giá trị tối ưu f(t)
$0 \le t \le 2$	xem Bảng 1.3	3640 - 30.t
$2 \le t \le 6$	xem Bảng 1.4	3340 + 120.t
$6 \le t < +\infty$	xem Bảng 1.5	3160 + 150.t

Dáng điệu của hàm giá trị tối ưu f(t) vẽ ở Hình 1.2.



Hình 1.2. Hàm giá trị tối ưu f(t) lồi, tuyến tính từng khúc, $t \ge 0$

Chương 2

BÀI TOÁN VẬN TẢI TUYẾN TÍNH

Chương này đề cập tới bài toán vận tải tuyến tính. Phần đầu chương trình bày nội dung và các tính chất cơ bản của bài toán vận tải. Tiếp đó, đề cập tới phương pháp tìm phương án cực biên ban đầu của bài toán. Sau đó, trình bày cơ sở lý luận và nội dung thuật toán thế vị giải bài toán vận tải. Cuối chương, nêu ví dụ minh hoạ cho thuật toán thế vị.

2.1. NỘI DUNG BÀI TOÁN VÀ TÍNH CHẤT

Giả sử cần vận chuyển một loại hàng từ m điểm cung cấp (gọi là các *trạm phát*), ký hiệu i = 1, ... , m, đến n điểm tiêu thụ (gọi là các *trạm thu*), ky hiệu j = 1, ... , n. Cho biết khả năng cung cấp hàng của trạm phát i là $a_i > 0$ (gọi là *lượng phát*), nhu cầu tiêu thụ hàng của trạm thu j là $b_j > 0$ (gọi là *lượng thu*) và chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ trạm phát i tới trạm thu j là $c_{ij} \geq 0$. Hãy xác định các biến $x_{ij} \geq 0$ (i = 1, ... , m; j = 1, ... , n), biểu thị lượng hàng cần vận chuyển từ trạm phát i tới trạm thu j sao cho mọi trạm thu nhận đủ hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất?

Mô hình toán học của bài toán vận tải như sau.

$$\text{(P)} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \text{ (cực tiểu tổng chi phí vận chuyển)} \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \forall i = 1, \ldots, m \text{ (trạm phát i giao hết hàng)} \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \forall j = 1, \ldots, n \text{ (trạm thu j nhận đủ hàng)} \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Điều kiện cần và đủ để bài toán (2.1) - (2.4) giải được ta phải có *điều kiện cân bằng thu phát* hay *điều kiện cân bằng cung cầu*, nghĩa là tổng cung bằng tổng cầu:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \tag{2.5}$$

Ký hiệu A_{ij} là véctơ hệ số của biến x_{ij} trong (2.2) - (2.3) Véctơ này có hai thành phần bằng +1 tại hàng thứ i và hàng thứ m + j, mọi thành phần khác bằng 0.

Véctơ x thỏa mãn (2.2) - (2.4) gọi là một *phương án* của bài toán vận tải. Một phương án đạt cực tiểu (2.1) gọi là *phương án tối ưu* hay *lời giải*. Phương án x là phương án cực biên khi và chỉ khi tập véctơ cột A_{ij} của ma trận A ứng với các $x_{ij} > 0$ độc lập tuyến tính hay tương đương, tập các ô (i, j) với $x_{ij} > 0$ không chứa chu trình.

Bổ đề 2.1. *Hạng của hệ ràng buộc* (2.2) - (2.3) *bằng* m + n - 1. *Hơn nữa, mỗi ràng buộc là tổ hợp tuyến tính của* m + n - 1 *ràng buộc còn lại, vì thế một ràng buộc bất kỳ có thể xem là thừa và có thể loại bỏ nếu cần.*

Mỗi phương án cực biên của bài toán vận tải có vừa đúng (m + n - 1) biến cơ sở. Tập hợp các véctơ hệ số A_{ij} của các biến cơ sở x_{ij} gọi là một *cơ sở* của bài toán.

Một phương án cực biên $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{m\times n}$ gọi là *không suy biến* nếu số phần tử của tập hợp $G = \{(i, j) : x_{ij} > 0\}$ bằng m + n - 1 và gọi là *suy biến* nếu $|G| < m + n - 1$.

Định nghĩa 2.1. 1. Một ma trận vuông được gọi là *ma trận tam giác* nếu nó có hai tính chất sau:

a) ma trận chứa ít nhất một hàng có đúng một phần tử khác 0;

b) Nếu hàng chứa phần tử khác 0 duy nhất và cột của nó bị xóa thì ma trận nhận được sẽ vẫn có tính chất trên.

2. Ta có thể định nghĩa ma trận vuông là *ma trận tam giác* nếu có thể hoán vị các hàng và cột của nó để được ma trận tam giác trên hoặc ma trận tam giác dưới.

Sau đây là các định lý cơ bản về bài toán vận tải dạng bảng (xem [5], tr. 211).

Định lý 2.1. *Mọi cơ sở của bài toán vận tải là ma trận tam giác.*

Định lý 2.2. *Mọi biến cơ sở có giá trị nguyên nếu mọi* a_i *và* b_j *là các số nguyên.*

Định lý 2.3. *Nếu mọi cước phí vận chuyển* c_{ij} *nguyên và nếu cho một nhân tử bất kỳ* (u_i *hoặc* v_j) *một giá trị nguyên tùy ý thì mọi nhân tử đơn hình* u_i *và* v_j *sẽ nguyên.*

2.2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN BAN ĐẦU

Cách đơn giản để xây dựng phương án cực biên ban đầu cho bài toán vận tải (dạng bảng) là áp dụng qui tắc (hay thuật toán) tam giác sau đây.

Qui tắc tam giác (Triangularity Rule**).** Chọn tuỳ ý một biến x_{pq} làm ứng viên cho biến cơ sở đầu tiên. Gán cho x_{pq} giá trị lớn nhất có thể, miễn là không vi phạm ràng buộc về lượng cung của trạm phát p (hàng p) và lượng cầu của trạm thu q (cột q), tức là phân vào ô (p, q) một lượng hàng bằng

$$x_{pq} = \min \{a_p, b_q\}.$$