

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Thúy Hằng

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu	1
1 Giải toán cực trị hình học bằng hình học thuần túy	5
1.1 Các tính chất, định lý về so sánh các đại lượng hình học	5
1.1.1 Bất đẳng thức tam giác	5
1.1.2 So sánh đường xiên - hình chiếu và ngược lại	6
1.1.3 Quan hệ đường kính và dây của đường tròn	6
1.1.4 Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây	6
1.1.5 Quan hệ giữa diện tích và chu vi của một hình	7
1.2 Các ví dụ	7
1.2.1 Ví dụ sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu	7
1.2.2 Ví dụ sử dụng mối quan hệ giữa đoạn thẳng và đường gấp khúc	9
1.2.3 Ví dụ áp dụng bất đẳng thức trong đường tròn	10
1.2.4 Ví dụ ứng dụng diện tích tìm cực trị.	11
1.3 Các tính chất, định lý về so sánh các đại lượng hình học trong không gian	17
1.3.1 Các tính chất, định lý	17
1.3.2 Ví dụ	18
1.4 Phương pháp biến hình	20
1.4.1 Hệ thống các phép biến hình phẳng và không gian	20
1.4.2 Nội dung phương pháp	21
1.4.3 Áp dụng các phép biến hình trong mặt phẳng	21

2	Giải toán cực trị hình học bằng công cụ đại số	29
2.1	Bất đẳng thức đại số	29
2.1.1	Định nghĩa bất đẳng thức trong đại số	29
2.1.2	Các bất đẳng thức cơ bản hay dùng	30
2.1.3	Nội dung của phương pháp	31
2.1.4	Các ví dụ (hình học phẳng và hình học không gian) . .	31
2.2	Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số	44
2.2.1	Hàm số và các giá trị cực trị của hàm số	44
2.2.2	Nội dung của phương pháp:	46
2.2.3	Các ví dụ (hình học phẳng và hình học không gian) . .	46
3	Giải toán cực trị hình học bằng các phương pháp khác	54
3.1	Phương pháp đường mức	54
3.1.1	Khái niệm đường mức	54
3.1.2	Nguyên lý tiếp xúc đường mức	54
3.1.3	Một số dạng đường mức cơ bản	55
3.1.4	Nội dung của phương pháp	59
3.1.5	Ví dụ áp dụng.	59
3.2	Kết hợp các phương pháp.	61
3.2.1	Kết hợp phương pháp hình học thuần túy và phương pháp tọa độ.	61
3.2.2	Giải bài toán cực trị kết hợp phương pháp hình học thuần túy và phương pháp đại số.	65
3.2.3	Giải bài toán cực trị kết hợp giữa phép đối xứng trục và phương pháp tọa độ.	66
	Tài liệu tham khảo	70

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo **PGS.TS Nguyễn Việt Hải**. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu và các đồng nghiệp của tôi ở trường THPT An Hải - Hải Phòng đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Nguyễn Thị Thúy Hằng

Mở đầu

Trong chương trình toán phổ thông, học sinh nhiều lần đã nghe khái niệm "lớn nhất, nhỏ nhất, giá trị cực đại, giá trị cực tiểu", đó chính là các khái niệm liên quan đến bài toán cực trị. Ngay khi học ở Trung học cơ sở, học sinh đã gặp các bài toán như: "Tìm diện tích lớn nhất của tam giác, của tứ giác" hay "xác định vị trí của đường thẳng a để diện tích tam giác ABC là nhỏ nhất",... Các đại lượng hình học được học ở phổ thông là: Độ dài, số đo góc, diện tích, thể tích. Liên quan đến các đại lượng hình học là các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các đại lượng mà ta gọi tắt là bài toán cực trị hình học.

Nhiều bài toán về cực trị hình học dẫn đến các cách chứng minh đặc sắc. Chúng có tác dụng phát triển tư duy logic, phát huy tính linh động và sáng tạo khi nghiên cứu toán. Chính vì vậy nhiều bài toán về cực trị hình học đã được chọn trong các kỳ thi học sinh giỏi toán toàn quốc bậc THCS và THPT.

Bài toán về cực trị hình học thường được phát biểu dưới các dạng sau:
 Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất, hay giá trị nhỏ nhất của một đại lượng nào đó;
 Dạng 2: Xác định vị trí của (điểm, đường thẳng, mặt phẳng...) để đại lượng hình học nào đó đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất. Bài toán tìm cực trị chỉ xuất hiện khi có sự chuyển động của đối tượng hình học hoặc có đại lượng hình học biến thiên.

Ý nghĩa của bài toán cực trị: Bài toán cực trị hình học thường liên quan đến thực tiễn. Để giải các bài toán này người làm toán phải biết tổng hợp các kiến thức khác nhau của Toán học thường là các kiến thức về đại số, về hình học, về giải tích,... Mở rộng hơn các bài toán cực trị là các bài toán về tối ưu hóa, chính vì thế bài toán cực trị hình học còn có tính ứng dụng cao trong lý thuyết cũng như trong thực hành. Đó cũng là lý do để tác giả chọn

đề tài luận văn "Cực trị trong hình học".

Phạm vi của luận văn là tìm và hệ thống lại các phương pháp giải toán cực trị hình học bằng các công cụ toán học đã có.

Ngoài phần mở đầu nội dung luận văn chia làm ba chương

Chương 1 dành để trình bày Giải toán cực trị hình học bằng công cụ hình học thuần túy.

Chương 2 đề cập đến Giải toán cực trị hình học bằng công cụ đại số.

Chương 3 trình bày các phương pháp khác để giải các bài toán khó hơn là Phương pháp đường mức và kết hợp các phương pháp khác.

Khi gặp một bài toán cực trị ta thường suy nghĩ theo một trong các hướng sau:

Thứ nhất: Dùng phương pháp của hình học thuần túy để khảo sát biểu thức cần tìm cực trị.

Thứ hai: Đặt một đại lượng thay đổi nào đó bằng biến t rồi viết biểu thức cần khảo sát thành một hàm của biến t . Sau đó khảo sát hàm vừa tìm được bằng các phương pháp của đại số.

Thứ ba: Dùng các bất đẳng thức đại số để đánh giá biểu thức cần khảo sát.

Dưới đây là một ví dụ sử dụng cả ba hướng suy nghĩ trên

Ví dụ 0.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(1; 2)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B khác O sao cho $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ bé nhất.

Giải.

Ở ví dụ này, ta trình bày theo ba hướng:

Hướng 1: Hạ $OH \perp \Delta$, trong tam giác vuông OAB , ta có:

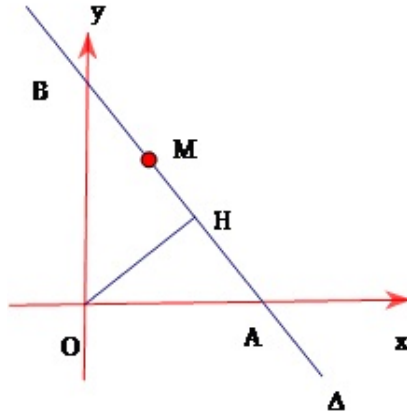
$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} \geq \frac{1}{OM^2}$$

(không đổi).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$H \equiv M \Leftrightarrow OM \perp \Delta.$$

Vậy $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ đạt giá trị bé nhất khi đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; 2)$ và có vectơ là $\overrightarrow{OM}(1; 2)$.



Hình 1:

Vậy đường thẳng Δ cần tìm là

$$(x - 1) + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0.$$

Nhận xét:

- Phép biến đổi $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2}$ là chuyển biểu thức ban đầu với hai đại lượng biến thiên OA, OB về biểu thức còn một đại lượng biến thiên OH .

- Cách giải trên không mở rộng được cho bài toán tổng quát hơn: xác định vị trí của đường thẳng Δ để $\frac{a}{OA^2} + \frac{b}{OB^2}$ nhỏ nhất ($a > 0, b > 0$).

Hướng 2: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; 2)$ và không qua gốc nên nó là đường thẳng có hệ số góc k với $k \neq 0, k \neq 2$

Khi đó: $\Delta : y - 2 = k(x - 1) \Leftrightarrow y = kx - k + 2$.

Ta có: $A\left(\frac{k-2}{k}; 0\right), B(0; 2-k)$ và $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{k^2 + 1}{(k-2)^2}$.

Xét hàm số:

$$f(k) = \frac{k^2 + 1}{(k-2)^2} \quad (k \neq 0, 2).$$

$$f'(k) = \frac{-4k^2 + 6k + 4}{(k-2)^4}.$$

$$\text{Ta có } f'(k) = 0 \Leftrightarrow -4k^2 + 6k + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ta dễ lập được bảng biến thiên của hàm số $f(k)$. Từ đó suy ra

Vậy $f(k)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $k = -\frac{1}{2}$.

Do đó $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$.

Hướng 3: Giả sử $A(m; 0), B(0; n), m, n \neq 0$.

Khi đó $\Delta : \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ đi qua điểm $M(1; 2)$ nên $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Svars ta có:

$$1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \right)^2 \leq (1^2 + 2^2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1 \\ m = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{5}{2} \\ m = 5 \end{cases}$$

Như vậy $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 5, n = \frac{5}{2}$ nghĩa là $x + 2y - 5 = 0$.

Trong phần tiếp theo tôi sẽ đi trình bày chi tiết nội dung của từng phương pháp và minh họa bằng các ví dụ cụ thể.

Chương 1

Giải toán cực trị hình học bằng hình học thuần túy

1.1 Các tính chất, định lý về so sánh các đại lượng hình học

1.1.1 Bất đẳng thức tam giác

Ta có các kết quả sau đây xem [10]

- Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.
- Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.
- Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại

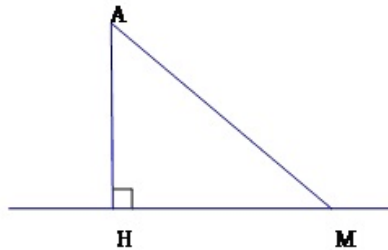
$$AB \leq AC + CB$$

(Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi C ở giữa A,B)

- Đoạn thẳng nối hai điểm có độ dài ngắn nhất so với mọi đường gấp khúc nối hai điểm đó.
- Trong một tam giác, đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

1.1.2 So sánh đường xiên - hình chiếu và ngược lại

- Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.



Hình 1.1:

- Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.
- Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:
 - a) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn;
 - b) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn;
 - c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

1.1.3 Quan hệ đường kính và dây của đường tròn

- Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.
- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

1.1.4 Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Trong một đường tròn:

- a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
- b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Trong một đường tròn:

- a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
- b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Áp dụng các kết quả trên vào bài toán cực trị.