ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**TỐNG VĂN HUY**

# PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ GIẢ CO MẠNH TRONG KHÔNG GIAN BANACH

**Chuyên ngành: Toán ứng dụng**
**Mã số : 60.46.01.12**

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN, 2013**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**--------------- ---------------**

**TỐNG VĂN HUY**

# PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ GIẢ CO MẠNH TRONG KHÔNG GIAN BANACH

**Chuyên ngành: Toán ứng dụng**

**Mã số : 60.46.01.12**

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học:

**TS. Nguyễn Thị Thu Thủy**

Thái Nguyên – 2013

# Mục lục

# Bảng ký hiệu

| | |
|---|---|
| $X$ | Không gian Banach thực |
| $X^*$ | Không gian liên hợp của $X$ |
| $\emptyset$ | Tập rỗng |
| $x := y$ | $x$ được định nghĩa bằng $y$ |
| $\forall x$ | Với mọi $x$ |
| $\exists x$ | Tồn tại $x$ |
| $I$ | Ánh xạ đơn vị |
| $J$ | Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J$ |
| $A^*$ | Toán tử liên hợp của toán tử $A$ |
| $\langle x^*, x\rangle$ | Giá trị của phiếm hàm $x^*$ tại điểm $x$ |
| $D(A)$ | Miền xác định của toán tử $A$ |
| $R(A)$ | Miền ảnh của toán tử $A$ |
| $N(A)$ | Tập các không điểm của toán tử $A$ |
| $Fix(A)$ | Tập các điểm bất động của toán tử $A$ |
| $x_n \to x^*$ | Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $x^*$ |

# Mở đầu

Một số định lý điểm bất động nổi tiếng xuất hiện từ đầu thế kỉ XX, trong đó phải kể đến nguyên lý điểm bất động Browder năm 1912 và nguyên lý ánh xạ co Banach năm 1922. Các kết quả này được mở rộng cho nhiều lớp ánh xạ khác nhau, chẳng hạn ánh xạ không giãn, ánh xạ giả co ... Lý thuyết điểm bất động có nhiều ứng dụng trong lý thuyết tối ưu, bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân ... Do đó, việc nghiên cứu phương pháp giải bài toán điểm bất động là vấn đề thời sự thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong nước và trên thế giới.

Mục đích của đề tài luận văn là nghiên cứu một số phương pháp xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ giả co mạnh trong không gian Banach trên cơ sở phương pháp lặp Mann và phương pháp lặp Ishikawa.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu một số khái niệm về không gian Banach trơn đều, không gian Banach lồi đều, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc, ánh xạ giả co và bài toán điểm bất động. Một số phương pháp cổ điển xấp xỉ điểm bất động trong không gian Hilbert được đề cập trong phần cuối của chương. Chương 2 trình bày một số định lý hội tụ mạnh của dãy lặp Mann và dãy lặp Ishikawa về điểm bất động của ánh xạ giả co mạnh trong không gian Banach. Phần đầu của chương nghiên cứu sự hội tụ của dãy lặp được cho chính xác. Phần thứ hai nghiên cứu sự hội tụ của dãy lặp được cho có nhiễu. Phần cuối của chương dành để trình bày các nghiên cứu về điều kiện để dãy lặp Mann và Ishikawa xác định khi miền xác định của ánh xạ là một tập con chính thường của toàn không gian.

Đóng góp chính của tác giả là tìm đọc, dịch và tổng hợp các kiến thức trong [1]-[4].

# Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của Cô trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Hàn lâm và Khoa học Việt Nam, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

**Tác giả**

**Tống Văn Huy**

# Chương 1

# Ánh xạ giả co và bài toán điểm bất động

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản về ánh xạ giả co và một số phương pháp xấp xỉ điểm bất động trong không gian Banach. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1]-[5].

## 1.1 Một số định nghĩa và ký hiệu

### 1.1.1 Không gian Banach lồi đều, trơn đều

Cho $X$ là một không gian Banach thực, $X^*$ là không gian liên hợp của $X$ và $\langle x^*, x\rangle$ là ký hiệu giá trị của $x^* \in X^*$ tại $x \in X$. Ký hiệu $2^X$ là một họ các tập con khác rỗng của $X$. Cho $T$ là một ánh xạ với miền xác định là $D(T)$ và miền giá trị là $R(T)$ và $N(T)$ là tập các không điểm và $Fix(T)$ là tập điểm bất động của ánh xạ $T$ tương ứng, nghĩa là

$$N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\},$$
$$Fix(T) = \{x \in D(T) : Tx = x\}.$$

Ký hiệu mặt cầu đơn vị của $X$ là $S_X$, trong đó $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

**Định nghĩa 1.1.1.** Không gian Banach $X$ được gọi là không gian

(i) lồi chặt nếu với $x, y \in S_X$, $x \neq y$ thì

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1, \ \forall \lambda \in (0,1),$$

(ii) lồi đều nếu với mọi $\varepsilon$ thỏa mãn $0 < \varepsilon \leq 2$, mọi $x, y$ thỏa mãn $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ và $\|x - y\| \geq \varepsilon$ suy ra tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) \geq 0$ sao cho

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \leq 1 - \delta.$$

Chú ý rằng mọi không gian Banach lồi đều đều là không gian phản xạ và lồi chặt.

**Định nghĩa 1.1.2.** Không gian Banach $X$ được gọi là

($i$) có chuẩn khả vi Gâteaux (hoặc không gian trơn) nếu giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

tồn tại với mỗi $x$, $y \in S_X$;

($ii$) có chuẩn khả vi Gâteaux đều nếu giới hạn trên đạt được đều với $x \in S_X$.

**Định nghĩa 1.1.3.** Giả sử $X$ là một không gian tuyến tính định chuẩn thực với số chiều lớn hơn hoặc bằng 2, và $x, y \in X$. Mô đun trơn của $X$ được xác định bởi

$$\rho_X(\tau) := \sup\left\{\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = \tau\right\}. \quad (1.1)$$

Ta có định nghĩa khác về không gian trơn đều như sau:

**Định nghĩa 1.1.4.** Một không gian Banach $X$ được gọi là trơn đều nếu

$$\lim_{\tau \to 0} h_X(\tau) := \lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0. \quad (1.2)$$

Các không gian $L^p$, $l^p$ là các ví dụ về không gian trơn đều.

### 1.1.2 Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc

**Định nghĩa 1.1.5.** Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach $X$ là ánh xạ $J : X \to 2^{X^*}$ xác định bởi

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|\|x^*\|,\ \|x^*\| = \|x\|\} \tag{1.3}$$

với mọi $x \in X$.

Ký hiệu ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị là $j$. Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc có tính chất sau đây.

**Mệnh đề 1.1.1.** *Giả sử $X$ là một không gian Banach. Khi đó,*

*(i) $J(x)$ là tập lồi, $J(\lambda x) = \lambda J(x)$, với mọi $\lambda > 0$;*

*(ii) $J$ là ánh xạ đơn trị khi $X^*$ là không gian lồi chặt. Trong trường hợp $X$ là không gian Hilbert thì $J \equiv I$-ánh xạ đơn vị trong $X$.*

Nếu $X$ là không gian Banach trơn thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J$ là đơn trị. Nếu $X$ là không gian Banach trơn đều thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J$ liên tục đều trên các tập con bị chặn của $X$.

Một bất đẳng thức đơn giản và thông dụng thường được dùng để thiết lập mối quan hệ giữa ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J$ và chuẩn $\|.\|$ trong không gian Banach là bất đẳng thức Petryshyn [5].

**Định lý 1.1.1.** *Cho $X$ là một không gian Banach thực, $J : X \to 2^{X^*}$ là ánh xạ đối ngẫu của $X$. Khi đó*

$$\|x + y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle \tag{1.4}$$

*với mọi $x, y \in X$ và $j(x + y) \in J(x + y)$.*

Bất đẳng thức (1.4) được gọi là bất đẳng thức Petryshyn.

### 1.1.3 Ánh xạ giả co

**Định nghĩa 1.1.6.** Cho $T : D(T) \subset X \to X$ là một ánh xạ. Ánh xạ $T$ được gọi là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz $L$ nếu với mọi