

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----

Trần Thị Phương Lâm

NGHIÊN CỨU PHÉP BIẾN HÌNH BẰNG PHƯƠNG  
PHÁP ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----

Trần Thị Phương Lâm

NGHIÊN CỨU PHÉP BIẾN HÌNH BẰNG PHƯƠNG  
PHÁP ĐẠI SỐ

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:  
PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - 2013

# Mục lục

Mở đầu	2
<b>1 Các phép biến hình trong mặt phẳng</b>	<b>3</b>
1.1 Phép dời hình . . . . .	4
1.2 Các phép dời hình thường gặp . . . . .	4
1.2.1 Phép tịnh tiến . . . . .	4
1.2.2 Phép đối xứng trục . . . . .	6
1.2.3 Phép đối xứng tâm . . . . .	8
1.2.4 Phép quay quanh một điểm . . . . .	11
1.2.5 Định lý về dạng chính tắc của phép dời hình . . . . .	13
1.3 Phép đồng dạng . . . . .	14
1.3.1 Phép vị tự . . . . .	14
1.3.2 Phép đồng dạng tỉ số $k$ . . . . .	15
1.4 Phép nghịch đảo . . . . .	16
1.5 Phương trình đại số của các phép biến hình phẳng . . . . .	18
1.5.1 Phương trình của phép tịnh tiến . . . . .	19
1.5.2 Phương trình của phép đối xứng trục . . . . .	20
1.5.3 Phương trình của phép đối xứng tâm . . . . .	22
1.5.4 Phương trình của phép quay . . . . .	25

1.5.5	Phân loại phép dời hình trong mặt phẳng . . . . .	27
1.5.6	Phương trình của phép vị tự . . . . .	29
1.5.7	Phương trình của phép đồng dạng . . . . .	32
1.5.8	Kết hợp các phép biến hình phẳng . . . . .	33
1.5.9	Phép nghịch đảo trong mặt phẳng . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Các phép biến hình trong không gian</b>	<b>48</b>
2.1	Nhắc lại các khái niệm . . . . .	48
2.1.1	Phép đối xứng qua một điểm, một đường thẳng, một mặt phẳng . . . . .	50
2.1.2	Phép quay quanh một đường thẳng . . . . .	52
2.1.3	Điểm bất động và vectơ bất động của phép biến đổi đẳng cự . . . . .	53
2.1.4	Phân loại phép biến đổi đẳng cự trong $E^3$ . . . . .	55
2.2	Các phép đồng dạng trong $E^3$ . . . . .	64
2.2.1	Phép vị tự trong $E^3$ . . . . .	64
2.2.2	Phép đồng dạng trong $E^3$ . . . . .	65
2.2.3	Phân loại phép đồng dạng trong $E^3$ . . . . .	66
2.3	Phép nghịch đảo trong $E^3$ . . . . .	67
2.3.1	Định nghĩa và các tính chất . . . . .	67
2.3.2	Ảnh của mặt phẳng và mặt cầu qua phép nghịch đảo . . . . .	69
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>74</b>

# Lời cảm ơn

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Nguyễn Việt Hải, Người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ và nghiêm khắc trong khoa học để tôi hoàn thành bản luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo khoa học, khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học, Đại Học Thái Nguyên, các thầy, cô giáo đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập tại đây. Tôi xin cảm ơn các thầy cô giáo, gia đình và bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ rất nhiều để tôi hoàn thành bản luận văn này.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

*Hải Phòng, Tháng 5 năm 2013*

*Học viên*

*Trần Thị Phương Lâm*

# Mở đầu

Phép biến hình là một đề tài đã được nhiều tác giả khai thác ở các khía cạnh khác nhau: chứng minh bằng cách sử dụng biến hình, tìm quỹ tích bằng biến hình, dựng hình nhờ dời hình hoặc phép nghịch đảo,...Nhiều bài tập hình học đơn giản nhờ biến hình đã trở thành cổ điển và có vẻ đẹp hoàn hảo. Đề tài "Nghiên cứu phép biến hình bằng phương pháp đại số" lại tiếp cận phép biến hình theo cách khác hẳn: sử dụng các công cụ của đại số, đặc biệt là phương pháp tọa độ để nghiên cứu và ứng dụng các phép biến hình.

Phép biến hình là một trong những nội dung cơ bản trong chương trình toán ở bậc Trung học cơ sở và Trung học phổ thông. Việc đưa nội dung phép biến hình vào chương trình toán THCS và THPT không những cung cấp cho học sinh những công cụ mới để giải toán mà còn tập cho học sinh làm quen với các phương pháp tư duy và suy luận mới. Tuy nhiên đó chỉ là các cách giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Với việc áp dụng phương pháp tọa độ vào giải các bài toán hình học giúp cho hình học thoát ra khỏi lối tư duy cụ thể và trực quan. Đặc biệt hơn việc ứng dụng phương pháp đại số giúp chúng ta giải bài toán một cách đơn giản hơn rất nhiều so với việc giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Việc lựa chọn công cụ, phương pháp giải thích hợp cho mỗi

bài toán giúp ta tiết kiệm được thời gian và công sức để giải bài toán đó một cách có hiệu quả nhất. Đó cũng là lý do tôi chọn đề tài luận văn "Nghiên cứu các phép biến hình bằng phương pháp đại số".

Phạm vi của luận văn là nghiên cứu các phép biến hình trong mặt phẳng bằng công cụ đại số. Chứng minh lại các tính chất của các phép biến hình bằng công cụ đại số đồng thời giải các bài toán liên quan. Từ đó thấy được ưu thế của việc đại số hóa các phép biến hình.

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương

Chương 1: Các phép biến hình trong mặt phẳng.

Chương 2: Các phép biến hình trong không gian.

Chương 1 đề cập đến các phép biến hình phẳng từ phép tịnh tiến đến phép nghịch đảo với cách làm là hệ thống các kiến thức cơ bản về mỗi phép biến hình, sau đó xây dựng các phương trình đại số ( biểu thức tọa độ ) tương ứng. Việc ứng dụng các phương trình đại số cho phép giải được một loạt các bài toán hình học có hiệu quả.

Chương 2 đề cập đến các phép biến hình trong không gian bằng cách đưa ra ngay phương trình của mỗi phép biến hình trong không gian như: phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay quanh một điểm, phép vị tự, phép đồng dạng, phép nghịch đảo. Kết quả quan trọng ở chương này là mô tả được các đặc trưng của một số phép biến hình phức tạp. Các ví dụ tính toán chi tiết cũng là những kết quả có ích của luận văn.

# Chương 1

## Các phép biến hình trong mặt phẳng

Trong đại số hay giải tích ta có khái niệm hàm số, tương tự như vậy ta có khái niệm phép biến hình trong hình học. Kiến thức của chương này được tập hợp từ tài liệu [2]

**Định nghĩa 1.1.** *Phép biến hình (trong mặt phẳng hoặc không gian) là một qui tắc với mỗi điểm  $M$  (thuộc mặt phẳng hoặc không gian) xác định một điểm duy nhất  $M'$  (thuộc mặt phẳng hoặc không gian).*

Điểm  $M'$  gọi là ảnh của điểm  $M$  qua phép biến hình đó.

Kí hiệu phép biến hình là  $f$ ,  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép biến hình  $f$  thì ta viết  $M' = f(M)$ . Với mỗi hình  $H'$  gồm các điểm  $M' = f(M)$ ,  $M \in H$  là ảnh của hình  $H$  qua  $f$ , ta cũng viết  $H' = f(H)$ .

Lưu ý:  $f$  là một song ánh.



## 1.1 Phép dời hình

**Định nghĩa 1.2.** *Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, tức là nếu  $M' = f(M), N' = f(N)$  thì  $d(M', N') = d(M, N)$ .*

Tính chất : các tính chất sau đã được chứng minh trong [1;5].

Phép biến hình biến:

Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

Một đường thẳng thành một đường thẳng.

Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .

Tam giác thành tam giác bằng nó .

Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, tâm thành tâm.

Góc thành góc bằng nó .

**Định lý 1.3.** *Tập hợp các phép dời hình trong mặt phẳng với phép hợp hai ánh xạ tạo thành một nhóm. Đó là nhóm các phép dời hình.*

**Định nghĩa 1.4.** *Phép đồng nhất là phép biến hình biến một điểm  $M$  thành chính nó.  $I_d : M \mapsto M$ .*

## 1.2 Các phép dời hình thường gặp

### 1.2.1 Phép tịnh tiến

**Định nghĩa 1.5.** *Trong mặt phẳng cho vectơ  $\vec{v}$ . Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$  được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$ .*

Kí hiệu:  $T_{\vec{v}}$

Tính chất: các tính chất sau đã được chứng minh trong [1;2], ta kí hiệu là T1,...,T6

T1: Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

T2: Phép tịnh tiến bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng.

T3: Phép tịnh tiến biến:

Tia thành tia.

Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó .

Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .

Tam giác thành tam giác bằng nó .

Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

T4: Phép tịnh tiến hoàn toàn được xác định khi biết vectơ tịnh tiến.

T5: Tích của hai phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến.

T6: Tập hợp các phép tịnh tiến lập thành một nhóm.

**Ví dụ 1.6.** Cho dây cung  $AB$  cố định không là đường kính của đường tròn  $(O, R)$ ,  $C$  là một điểm thay đổi trên đường tròn và  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là giao điểm của hai đường tròn tâm  $C$  và tâm  $H$  có bán kính cùng bằng  $CH$ .

a, Chứng minh rằng nếu  $I$  là trung điểm của  $AB$  thì  $\vec{CH} = 2\vec{OI}$ .

b, Tìm quỹ tích các điểm  $M$  và các điểm  $N$ .

Giải

a. Lấy  $B'$  là ảnh của  $B$  qua  $O$  thì  $2\vec{OI} = \vec{B'A}$ . Ta cần chứng minh  $\vec{B'A} = \vec{CH}$ . Vì

$B'A \perp AB, CH \perp AB \Rightarrow B'A // CH$   
 $B'C \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow B'C // AH$  nên suy ra  $B'CHA$  là hình bình