

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ LOAN

VẬN DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ CƠ BẢN
VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ LOAN

VẬN DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ CƠ BẢN
VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.0113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn	1
Lời nói đầu	2
Một số ký hiệu và chữ viết tắt	3
1 Bốn nguyên lý cơ bản	5
1.1 Nguyên lý quy nạp	5
1.2 Nguyên lý bù-trừ	12
1.3 Nguyên lý Dirichlet	21
1.4 Nguyên lý lùi dần	26
2 Các vấn đề liên quan	33
2.1 Phương pháp đại lượng bất biến	33
2.2 Phủ của một tập hợp	44
2.3 Ứng dụng trong bài toán hình học tổ hợp.	50
Kết luận	57
Tài liệu tham khảo	58

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được trình bày dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo PGS. TS Đàm Văn Nhĩ. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành đến cô giáo TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng các thầy giáo cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2011 - 2013, những người đã đem tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy và trang bị cho tôi nhiều kiến thức cơ sở.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K5B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Hải Phòng, tháng 05 năm 2013.

Tác giả

Vũ Thị Loan

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết tổ hợp là một phần rất quan trọng của toán học rời rạc chuyên nghiên cứu sự sắp xếp các đối tượng. Khi giải bài toán tổ hợp ta phải liệt kê, đếm các đối tượng theo các tính chất nào đó. Tổ hợp nghiên cứu các bài toán thường được kết hợp một số ràng buộc và có nhiều nghiệm. Nó chỉ ra số lượng nghiệm, lớp các nghiệm cụ thể hay lớp các nghiệm thỏa mãn thêm một số điều kiện nào đấy. Các thuật toán tổ hợp ngày càng được biến đổi hoàn thiện để dễ sử dụng và có độ phức tạp tính toán nhỏ dần. Khi thực hiện các thuật toán tổ hợp, các nghiệm của bài toán thường được xây dựng theo một vài nguyên lý nào đấy. Do vậy, luận văn này đặt vấn đề trình bày lại bốn nguyên lý cơ bản trong lý thuyết Tổ hợp và xây dựng một số ví dụ áp dụng.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo. Chương 1 tập trung trình bày bốn nguyên lý. Chương 2 trình bày các vấn đề liên quan như: Phương pháp đại lượng bất biến, phủ của một tập hợp và ứng dụng vào bài toán hình học tổ hợp.

Nội dung chương 1 gồm bốn mục. Mục 1.1 được dành để trình bày **Nguyên lý quy nạp**: Để chỉ ra mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n \geq \alpha$, ta chỉ cần kiểm tra $P(\alpha)$ đúng và $P(n+1)$ đúng khi $P(n)$ đúng. Từ đó suy ra $P(n)$ luôn luôn đúng với mọi $n \geq \alpha$.

Nguyên lý thứ hai được xét đến là **Nguyên lý Bù-Trừ** và được trình bày ở Mục 1.2. Khi xét bài toán tổ hợp, ta thường phải đếm xem có bao nhiêu cấu hình có thể tạo ra với những yêu cầu đặt trước. Nói chung, để đếm các cấu hình đã cho người ta tìm cách đưa các cấu hình về loại quen thuộc qua việc phân ra thành các lớp để áp dụng quy tắc cộng. Nhưng khi nhiều công việc có thể làm đồng thời thì quy tắc cộng không còn đúng nữa. Do vậy chúng ta phải xét Nguyên lý cộng dưới đây:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Tổng quát Nguyên lý cộng ta có Nguyên lý Bù-Trừ. Cái khó của việc vận dụng Nguyên lý Bù-Trừ là việc phân lớp như thế nào để dễ dàng có được các số đếm.

Mục 1.3 trình bày nguyên lý thứ ba, đó là **Nguyên lý Dirichlet**. ” Nếu có n đồ vật được cất vào k hộp, sẽ có một hộp chứa ít nhất $\left[\frac{n}{k}\right]$ vật.” Cái khó của việc vận dụng Nguyên lý Dirichlet là việc coi cái gì là số vật và cái gì được coi là số hộp.

Còn nguyên lý thứ tư là **Nguyên lý lùi dần**, được trình bày ở Mục 1.4. Đây là một phương pháp do Piere de Fermat đưa ra khi giải phương trình nghiệm nguyên. Xét phương trình $f(x, y, z) = 0$ trong $\mathbb{Z}$. Giả sử $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$ là nghiệm của phương trình $f(x, y, z) = 0$. Dựa vào giả thiết để suy ra $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{Z}^3$ là nghiệm của phương trình $f(x, y, z) = 0$ với $|x_0| > |x_1|$, chẳng hạn. Lặp lại được dãy lùi dần các số tự nhiên $|x_0| > |x_1| > |x_2| > \dots$. Sau một số hữu hạn bước, ta đi đến lời giải phương trình. Cái khó của dạng toán này là với bài toán đã cho phải xây dựng được một phép chuyển từ bộ nọ đến bộ kia để lùi. Nguyên lý lùi dần đã và đang được vận dụng để xét các bài toán trong nhiều lĩnh vực. Tương tự ta cũng có Nguyên lý tăng dần.

Trong chương 2 tập trung trình bày ba vấn đề liên quan đến bốn nguyên lý trên. Mục 2.1 trình bày về phương pháp đại lượng bất biến. Mục 2.2 trình bày về phủ của một tập hợp. Mục 2.3 trình bày một vài bài toán hình học tổ hợp.

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

Tập rỗng được ký hiệu qua ϕ

Với mọi x được viết là $\forall x$

Tập các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N}$

Tập các số nguyên được ký hiệu là $\mathbb{Z}$

Tập các số hữu tỉ được ký hiệu là $\mathbb{Q}$

Tập các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$

Lực lượng của tập A được ký hiệu là $\text{card}A$

Chương 1

Bốn nguyên lý cơ bản

Chương này tập trung trình bày bốn nguyên lý cơ bản, như: Nguyên lý quy nạp, Nguyên lý Bù-Trừ, Nguyên lý Dirichlet và Nguyên lý lùi dần.

1.1 Nguyên lý quy nạp

Mệnh đề 1.1.1. *Tập tất cả các số tự nhiên $\mathbb{N}$ cùng quan hệ thứ tự là một tập sắp thứ tự tốt.*

Mệnh đề 1.1.2. *Nếu tập bất kỳ $M \subset \mathbb{N}$ có các tính chất: $0 \in M$ và $n + 1 \in M$ khi $n \in M$, thì $M = \mathbb{N}$.*

Hai kết quả dưới đây thường được gọi là nguyên lý thứ nhất và nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học.

Mệnh đề 1.1.3.[Nguyên lý thứ nhất] *Nếu mệnh đề $P(n)$, phụ thuộc vào số tự nhiên n thỏa mãn:*

- (i) $P(\alpha)$ đúng với một $\alpha \in \mathbb{N}$.
- (ii) $P(n + 1)$ đúng khi $P(n)$ đúng, ở đó $n \geq \alpha, n \in \mathbb{N}$ thì $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq \alpha$.

Mệnh đề 1.1.4.[Nguyên lý thứ hai] *Nếu mệnh đề $P(n)$, phụ thuộc vào số tự nhiên n , thỏa mãn:*

- (i) $P(\alpha)$ đúng với một $\alpha \in \mathbb{N}$.
- (ii) $P(n + 1)$ đúng khi $P(\alpha), P(\alpha + 1), \dots, P(n)$ đúng, ở đó $n \geq \alpha, n \in \mathbb{N}$ thì $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq \alpha$.

Bây giờ ta sẽ vận dụng hai nguyên lý này để xét các bài toán sơ cấp.

Ví dụ 1.1.5. Với số nguyên $n \geq 2$ và $P_n = n!$, hãy chứng minh $2P_n \geq 2^n$.

Bài giải: Với $n = 2$ có $2P_2 = 4 = 2^2$. Như vậy kết luận đúng cho $n = 2$. Giả sử kết luận đúng cho $n > 2$. Khi đó $2P_n \geq 2^n$. Xét tích

$$2P_{n+1} = (n+1).2P_n \geq (n+1)2^n > 2.2^n = 2^{n+1}.$$

Từ đó suy ra $2P_n \geq 2^n, \forall n \geq 2$. □

Ví dụ 1.1.6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 6$ ta luôn có $n! > 3^n$.

Bài giải: Bởi vì $7! = 5040 > 2187 = 3^7$ nên kết luận đúng với $n = 7$. Giả sử kết luận đã đúng với n . Khi đó ta có $n! > 3^n$. Với $n+1$ có $(n+1)! = n!(n+1) > 3^n(n+1)$ theo giả thiết quy nạp. Vì $n+1 > 3$ nên $(n+1)! > 3^{n+1}$ và như thế $n! > 3^n$ đúng với mọi số nguyên $n > 6$. □

Ví dụ 1.1.7. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 0$ ta luôn có bất đẳng thức:

$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Bài giải: Bởi vì $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ nên ta nhận được bất đẳng thức $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

Hiển nhiên $1 < 2$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n . Khi đó ta có $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$. Lại có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

và như thế

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2n+1+1}{\sqrt{n+1}}$$

hay $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$. Tóm lại kết quả đúng với mọi số nguyên $n > 0$. □

Ví dụ 1.1.8. Dãy (a_n) được cho như sau: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 10, a_4 = 15, a_5 = 21, \dots$. Xác định a_n theo n và chứng minh bất đẳng thức

$$T = (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{10}) \cdots (1 - \frac{1}{a_n}) < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Bài giải: Từ $a_1 = 3 = a_0 + 2, a_2 = 6 = a_1 + 3, a_3 = 10 = a_2 + 4, a_4 = 15 = a_3 + 5, a_5 = 21 = a_4 + 6$ suy ra $a_n = a_{n-1} + n + 1$ và điều này dễ dàng

có được qua quy nạp. Vậy $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

và suy ra $1 - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - 1}{a_k} = \frac{(k+1)(k+2) - 2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$. Như

vậy $1 - \frac{1}{a_k} = (1 - \frac{1}{k+1})(1 + \frac{1}{k+2})$ và ta có được phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} T &= (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{n+1})(1 + \frac{1}{n+2}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{5^2}) \cdots (1 - \frac{1}{(n+1)^2})(1 + \frac{1}{n+2}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{3^2 - 1}{3^2})(\frac{4^2 - 1}{4^2})(\frac{5^2 - 1}{5^2}) \cdots (\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2})(1 + \frac{1}{n+2}) \\ &= \frac{2.3.4^2.5^2 \cdots (n-1)^2 n^2 (n+1)(n+2)(n+3)}{2.3^2.4^2.5^2 \cdots (n-1)^2 n^2 (n+1)^2 (n+2)} \\ &= \frac{n+3}{3(n+1)} < \frac{n+3}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tóm lại $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ và nhận được bất đẳng thức $T < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$. $\square$

Ví dụ 1.1.9. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 0$ ta có đồng nhất thức:

$$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Bài giải: Với $n = 1$ ta có $1.2 = 2 = (1-1)2^{1+1} + 2$ và như vậy kết luận đúng. Giả sử kết luận đúng với n . Khi đó

$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$. Với $n+1$ ta có kết quả sau:

$$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n.2^n + (n+1)2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} = n.2^{n+2} + 2$$

và như thế kết luận cũng đúng với $n+1$. Tóm lại, ta có đồng nhất thức

$$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$