

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC  
-----

Nguyễn Ngọc Tĩnh

GIẢI VÀ BIỆN LUẬN  
PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA  
TRONG TRƯỜNG SỐ THỰC VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP  
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học  
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

## LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của NGND-GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, trường Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của thầy trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

*Tác giả*

**Nguyễn Ngọc Tĩnh**

# Mục lục

|                                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Mở đầu</b>                                                                               | <b>3</b>  |
| <b>1 Các kiến thức cơ bản về phương trình bậc ba</b>                                        | <b>5</b>  |
| 1.1 Phương pháp giải phương trình bậc ba . . . . .                                          | 5         |
| 1.2 Các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba . . . . .                                  | 6         |
| <b>2 Ứng dụng phương trình bậc ba vào giải một số hệ phương trình đại số</b>                | <b>15</b> |
| 2.1 Một số hệ phương trình đại số giải được bằng cách áp dụng phương trình bậc ba . . . . . | 15        |
| 2.2 Một số bài toán tương tự . . . . .                                                      | 27        |
| <b>3 Một số ứng dụng khác của phương trình bậc ba</b>                                       | <b>29</b> |
| 3.1 Ứng dụng phương trình bậc ba để giải một số phương trình bậc bốn . . . . .              | 29        |
| 3.2 Phương trình bậc ba với nghiệm là các yếu tố độ dài trong tam giác . . . . .            | 33        |
| 3.3 Một số phương trình lượng giác đưa được về phương trình bậc ba đại số . . . . .         | 50        |
| <b>Kết luận</b> . . . . .                                                                   | <b>53</b> |
| <b>Tài liệu tham khảo</b> . . . . .                                                         | <b>54</b> |

# Mở đầu

Chuyên đề phương trình và hệ phương trình trong Toán học cấp THCS và THPT là một trong những đơn vị kiến thức truyền thống, và cực kỳ quan trọng. Các bài toán về phương trình và hệ phương trình có thể xem như những dạng toán cơ bản nhất của chương trình đại số bậc phổ thông. Mỗi bài toán đều có thể có nhiều cách giải. Tuy nhiên việc hệ thống hóa các phương pháp giải sẽ cho phép nhìn nhận các bài toán theo một hệ thống nhất quán. Từ đó các em học sinh có thể thấy được thuật toán chung để giải các bài toán về phương trình và hệ phương trình.

Trong đề tài này, không nhằm khảo sát đầy đủ các khía cạnh của vấn đề về giải, biện luận phương trình, hệ phương trình mà chỉ đưa ra cách giải và biện luận phương trình bậc ba theo phương pháp mới. Cùng với đó là những tính chất, định lý đã được chứng minh về tính chất nghiệm của phương trình bậc ba. Dựa vào cách giải và biện luận của phương trình. Ứng dụng vào giải một số hệ phương trình đại số. Ngoài ra là một số ứng dụng khác của việc giải và biện luận phương trình bậc ba. Luận văn được chia làm ba chương: Chương 1 trình bày cách giải và biện luận phương trình bậc ba tổng quát và một số tính chất, định lý về tập nghiệm của phương trình bậc ba. Chương 2 xét các ứng dụng của phương trình bậc ba vào giải hệ phương trình và phương trình lượng giác. Trong chương này đưa ra hệ thống bài tập từ mức độ đơn giản cho đến những bài toán thi chọn học sinh giỏi các tỉnh và học sinh giỏi quốc gia có hướng dẫn giải. Chương 3 trình bày một số ứng dụng khác của phương trình bậc ba. Cụ thể là ứng dụng của phương trình bậc ba vào để giải một số bài toán phương trình bậc bốn. Ứng dụng của phương trình bậc ba vào giải quyết các bài

toán mà yếu tố nghiệm của phương trình là các yếu tố độ dài trong tam giác. Phần cuối là một số phương trình lượng giác có thể giải được bằng cách đưa về phương trình bậc ba đại số.

# Chương 1

## Các kiến thức cơ bản về phương trình bậc ba

### 1.1 Phương pháp giải phương trình bậc ba

Các sách hiện nay chủ yếu trình bày cách giải phương trình bậc ba theo cách cổ điển là công thức Cardano thông qua số phức. Tuy nhiên tôi lựa chọn giải phương trình bậc ba theo cách của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã trình bày trong quyển “Phương pháp giải phương trình và bất phương trình” dựa vào các đồng nhất thức đại số và lượng giác không trên trường số thực.

Nhận xét rằng mọi phương trình bậc ba tổng quát

$$a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

đều có thể đưa được về dạng:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

trong đó

$$a = \frac{b_1}{a_1}, b = \frac{c_1}{a_1}, c = \frac{d_1}{a_1}.$$

Đặt  $x = y - \frac{a}{3}$ , ta có  $\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow y^3 - py = q$ , trong đó  $p = \frac{a^3}{3} - b$ ;  $q = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c$ .

1) Nếu  $p = 0$  thì phương trình có nghiệm duy nhất  $y = \sqrt[3]{q}$ .

2) Nếu  $p > 0$ , đặt  $y = 2\sqrt{\frac{p}{3}}t$  khi đó ta được phương trình  $4t^3 - 3t = m$

với  $m = \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{p}}$ .

- a) Nếu  $|m| < 1$ , đặt  $m = \cos \alpha$  khi đó phương trình có ba nghiệm  
 $t_1 = \cos \frac{\alpha}{3}; \quad t_{2,3} = \cos \frac{\alpha \pm \pi}{3}.$
- b) Nếu  $m = 1$  thì phương trình có nghiệm đơn  $t = 1$  và nghiệm bội  
 $t = -\frac{1}{2}$
- c) Nếu  $m = -1$  thì phương trình có nghiệm đơn  $t = -1$  và nghiệm bội  
 $t = \frac{1}{2}$
- d) Nếu  $|m| > 1$ , đặt  $m = \frac{1}{2}(d^3 + \frac{1}{d^3})$  trong đó  $d^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$ , khi đó phương trình có nghiệm duy nhất  $t = \frac{1}{2}(d + \frac{1}{d}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}}).$
- 3) Nếu  $p < 0$ , đặt  $y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}t$  khi đó ta được phương trình  $4t^3 + 3t = m$  với  $m = \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{p}}$ . Đặt  $m = \frac{1}{2}(d^3 - \frac{1}{d^3})$  với  $d^3 = m \pm \sqrt{m^2 + 1}$  khi đó phương trình có nghiệm duy nhất  $t = \frac{1}{2}(d - \frac{1}{d}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}}).$

## 1.2 Các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba

**Định lý 1.1** (Định lý Viète). Gọi  $x_1, x_2, x_3$  là nghiệm của phương trình (1.1), khi đó

$$T_1 := x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

$$T_2 := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$$

$$T_3 := x_1x_2x_3 = -c.$$

Từ định lý Viète ta có các tính chất sau:

**Tính chất 1.1.**  $T_4 := \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{b}{c}.$

**Chứng minh.** Ta có  $T_4 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{T_2}{T_3} = -\frac{b}{c}.$

**Tính chất 1.2.**  $T_5 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b.$

**Chứng minh.** Ta có  $T_5 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = a^2 - 2b.$

**Tính chất 1.3.**  $T_6 := (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = -ab + c$ .

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} T_6 &= (T_1 - x_1)(T_1 - x_2)(T_1 - x_3) = T_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3 \\ &= T_1T_2 - T_3 = -ab + c. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.4.**  $T_7 := x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a^3 + 3ab - 3c$ .

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^3 &= (x_1 + x_2)^3 + 3(x_1 + x_2)x_3(x_1 + x_2 + x_3) + x_3^3 \\ &= x_1^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2^3 + 3T_1(x_1x_3 + x_2x_3) + x_3^3 \\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3T_1(x_1x_3 + x_2x_3) + 3x_1x_2(T_1 - x_3) \\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3T_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3 \\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3T_1T_2 - 3T_3 \\ &\Rightarrow T_7 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3T_1T_2 + 3T_3 \\ &= T_1^3 - 3T_1T_2 + 3T_3 = -a^3 + 3ab - 3c. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.5.**  $T_8 := (x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) = a^3 - 4ab + 8c$ .

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} T_8 &= (T_1 - 2x_3)(T_1 - 2x_1)(T_1 - 2x_2) \\ &= T_1^3 - 2T_1^2(x_1 + x_2 + x_3) + 4T_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 8x_1x_2x_3 \\ &= -T_1^3 + 4T_1T_2 - 8T_3 = a^3 - 4ab + 8c. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.6.**  $T_9 := \frac{x_1 + x_2}{x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_3 + x_1}{x_2} = \frac{ab - 3c}{c} = \frac{ab}{c} - 3$ .

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} T_9 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_3} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2} - 3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) - 3 \\ &= T_1T_4 - 3 = \frac{ab}{c} - 3. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.7.**  $T_{10} := x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = b^2 - 2ac$ .

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} T_{10} &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2(x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_2x_3) \\ &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= T_1^2 - 2T_3T_1 = b^2 - 2ac. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.8.**

$$T_{11} := x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac.$$

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} T_{11} &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2) \\ &= T_5^2 - 2T_{10} = (a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac) \\ &= a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.9.** với mọi  $k, l$  ta có

$$T_{12} := (k + lx_1)(k + lx_2)(k + lx_3) = k^3 - k^2la + kl^2b - l^3c.$$

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} T_{12} &= (k + lx_1)(k + lx_2)(k + lx_3) \\ &= k^3 + k^2l(x_1 + x_2 + x_3) + kl^2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + l^3x_1x_2x_3 \\ &= k^3 - k^2la + kl^2b - l^3c. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.10.**

$$T_{13} := \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = \frac{a}{c}.$$

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned} T_{13} &= \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} \\ &= \frac{T_1}{T_3} = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.11.**

$$T_{14} := \frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_3x_1} + \frac{x_3}{x_1x_2} = \frac{2b - a^2}{c}.$$

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} T_{14} &= \frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_3x_1} + \frac{x_3}{x_1x_2} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1x_2x_3} = \frac{T_5}{T_3} = \frac{a^2 - 2b}{-c} \\ &= \frac{2b - a^2}{c}. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.12.**

$$T_{15} := \frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_3x_1}{x_2} = 2a - \frac{b^2}{c}.$$

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} T_{15} &= \frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_3x_1}{x_2} \\ &= \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{T_{10}}{T_3} \\ &= 2a - \frac{b^2}{c}. \end{aligned}$$

**Tính chất 1.13.**

$$T_{16} := \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} T_{16} &= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \\ &= \frac{x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2}{x_1^2x_2^2x_3^2} \\ &= \frac{T_{10}}{T_3^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}. \end{aligned}$$