ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR□ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH TỪ SƠN

MỘT SỐ PH□ƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN BIÊN HỖN HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC MÁY TÍNH

THÁI NGUYÊN, NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH TỪ SƠN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN BIÊN HỖN HỢP

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. VŨ VINH QUANG

THÁI NGUYÊN, NĂM 2013

MỤC LỤC

Các ký hiệu

L	Toán tử Elliptic
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid n chiều
Ω	Miền giới nội trong không gian $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	Biên trơn Lipschitz
$C^k\left(\Omega\right)$	Không gian các hàm có đạo hàm cấp k liên tục
$L^2\left(\Omega\right)$	Không gian các hàm đo được bình phương khả tích
$W^{1,p}\left(\Omega\right)$	Không gian Sobolev với chỉ số p
$H^{1/2}\left(\Omega\right)$	Không gian Sobolev với chỉ số $1/2$
$H_0^1\left(\Omega\right)$	Không gian các hàm có vết bằng 0 trên $\partial\Omega$
$H^{-1}\left(\partial\Omega\right)$	Không gian đối ngẫu với $H_0^1\left(\Omega\right)$
$H^{-1/2}\left(\partial\Omega\right)$	Không gian đối ngẫu với $H^{1/2}\left(\Omega\right)$
$\left\| \cdot \right\|_V$	Chuẩn xác định trên không gian V
$\left(\cdot \right)_V$	Tích vô hướng xác định trên không gian V
$C_\gamma\left(\Omega\right)$	Hằng số vết
C_Ω	Hằng số poincare
E	Ma trận đơn vị

Mở đầu

Trong thực tế, các bài toán cơ học và vật lý thường được mô tả bằng các bài toán biên với phương trình đạo hàm riêng dạng cấp hai và cấp bốn trong đó phương trình Elliptic và phương trình song điều hòa là các phương trình được các nhà khoa học kỹ thuật rất quan tâm bởi các phương trình đó liên quan đến các bài toán mô tả độ uốn, dao động của các tấm và màng mỏng. Đại đa số các trường hợp, các bài toán thực tế thường được mô hình hóa bằng chỉ một loại phương trình. Tuy nhiên khi nghiên cứu mô hình chuyển dịch ngang của một tấm đàn hồi được cấu thành bởi hai thành phần khác nhau, một là màng mỏng và phần còn lại là bản cứng, thông qua mô hình toán học, dao động của hệ hỗn hợp trên sẽ được mô tả bởi bài toán biên tiêu biểu dạng hỗn hợp giữa phương trình cấp hai và cấp bốn với các điều kiện biên hỗn hợp hoặc hỗn hợp mạnh. Trong tài liệu [5], tác giả đã mô tả bài toán, chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm và đồng thời và đưa ra một phương pháp lặp xác định nghiệm gần đúng của bài toán hỗn hợp trên cơ sở sơ đồ chia miền Dirichle-Neumann. Tuy nhiên trên cơ sở phương pháp phân rã bài toán cấp bốn về hai bài toán cấp hai kết hợp với phương pháp chia miền cùng phương pháp toán tử biên, ta có thể xây dựng một số phương pháp lặp khác để giải bài toán trên.

Nội dung chính của luận văn đặt vấn đề nghiên cứu mô hình toán học của bài toán hỗn hợp, trên cơ sở các kết quả về phương pháp phân rã, phương pháp xấp xỉ biên và phương phương pháp chia miền xây dựng một số phương pháp lặp để tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán, khảo sát sự hội tụ và tính toán tử nghiệm trên máy tính điện tử để kiểm tra sự hội tụ của các sơ đồ lặp. Cấu trúc của luận văn gồm ba chương:

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về các không gian hàm, các khái niệm cơ bản về nghiệm yếu của phương trình Elliptic, lý thuyết về sơ đồ lặp, phương pháp sai phân, thuật toán thu gọn khối lượng tính toán giải hệ phương trình vectơ 3 điểm. Đây là những kiến thức quan trọng làm cơ sở nghiên cứu về mô hình bài toán được mô tả ở các chương tiếp theo của luận văn.

Chương 2: Đưa ra các kết quả đã biết về phương pháp chia miền dưới dạng tuần tự và song song để giải các bài toán biên hỗn hợp mạnh, phương pháp xấp xỉ biên giải bài toán song điều hòa. Đây là cơ sở lý thuyết chính để đề xuất các sơ đồ lặp tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán biên hỗn hợp trình bày trong chương 3.

Chương 3: Mô tả mô hình toán học của các bài toán biên hỗn hợp giữa phương trình cấp hai và phương trình cấp bốn. Trên cơ sở các phương pháp đã trình bày trong chương 2, luận văn xây dưng một số phương pháp lặp xác định nghiệm xấp xỉ của bài toán hỗn hợp, tiến hành tính toán kiểm tra sự hội tụ của các sơ đồ lặp từ đó đưa ra kết luận về tính hữu hiệu của các phương pháp. Các kết quả số trong luận văn được thực hiện trong môi trường MATLAB.

Mặc dù đã cố gắng song nội dung bản luận văn không thể tránh được những sai sót. Em rất mong nhận được sự chỉ bảo của các Thầy Cô giáo, đóng góp ý kiến bạn đồng nghiệp để luận văn thêm hoàn thiện.

Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo hướng dẫn TS. Vũ Vinh Quang đã tận tình hướng dẫn em trong suốt quá trình làm luận văn.

Em cũng xin chân thành cảm ơn các Thầy Cô giáo, bạn bè, đồng nghiệp và gia đình đã luôn giúp đỡ, động viên em trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2013

Học viên

ĐINH TỪ SƠN

Chương 1
Các kiến thức cơ bản

Nội dung chương 1 của luận văn trình bày một số kiến thức cơ bản về các không gian hàm, đặc biệt là không gian Sobolev, khái niệm về nghiệm yếu của phương trình, các kiến thức về các sơ đồ lặp và đặc biệt là phương pháp sai phân và thuật toán thu gọn khối lượng tính toán. Đây là các kiến thức nền tảng, là cơ sở cho việc trình bày các nội dung trong chương 2 và chương 3 của luận văn. Các kiến thức trên được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 6, 7].

1.1 Các kiến thức cơ bản về không gian hàm

1.1.1 Không gian $C^k\left(\Omega\right)$

Giả sử Ω là miền bị chặn trong không gian Euclid n chiều $\mathbb{R}^n$ và có $\overline{\Omega}$ là bao đóng của Ω. Ta kí hiệu $C^k\left(\overline{\Omega}\right), \left(k = 1, 2, 3...\right)$ là tập các hàm có đạo hàm đến cấp *k* kể cả *k* trong Ω, liên tục trong $\overline{\Omega}$. Ta đưa vào $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ chuẩn

$$\left\|u\right\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{\left|\alpha\right|=k} \max\left|D^\alpha u\left(x\right)\right| \tag{1.1}$$

Trong đó $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ được gọi là đa chỉ số là vectơ với các tọa độ nguyên không âm, $\left|\alpha\right| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} ... \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

Sự hội tụ theo chuẩn này là sự hội tụ đều trong $\overline{\Omega}$ của các hàm và tất cả các đạo hàm của chúng đến cấp k kể cả k. Rõ ràng tập $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ với chuẩn (1.1) là một không gian Banach.

1.1.2 Không gian $L_P(\Omega)$

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và p là một số thực dương. Ta kí hiệu $L_P(\Omega)$ là lớp các hàm đo được f xác định trên Ω sao cho

$$\int_{\Omega} \left|f\left(x\right)\right|^{p} dx < \infty. \tag{1.2}$$

Trong $L_p(\Omega)$ ta đồng nhất các hàm bằng nhau hầu khắp trên Ω. Như vậy các phần tử của $L_P(\Omega)$ là các lớp tương đương các hàm đo được thỏa mãn (1.2) và hai hàm tương đương nếu chúng bằng nhau hầu khắp trên Ω. Vì

$$\left|f(x)+g(x)\right|^{p} \leq \left(\left|f(x)+g(x)\right|\right)^{p} \leq 2^{p}\left(\left|f(x)\right|^{p}+\left|g(x)\right|^{p}\right)$$

nên rõ ràng $L_P(\Omega)$ là một không gian vectơ.

Ta đưa vào $L_P(\Omega)$ phiếm hàm $\|.\|_p$ xác định bởi

$$\left\|u\right\|_{p} = \left\{\int_{\Omega} \left|u(x)\right|^{p} dx\right\}^{1/p}. \tag{1.3}$$

Định lí 1.1 *(Bất đẳng thức Hoder). Nếu* $1 < p < \infty$ *và* $u \in L_P(\Omega)$, $v \in L_P(\Omega)$ *thì* $uv \in L_P(\Omega)$ *và*

$$\int_{\Omega} \left|u(x)v(x)\right| dx \leq \left\|u\right\|_{p} \left\|u\right\|_{p'} \tag{1.4}$$

trong đó $p' = p/(p-1)$ *tức là* $1/p + 1/p' = 1$, p' *được gọi là số mũ liên hợp với* p.

Định lí 1.2 *(Bất đẳng thức Minkowski). Nếu* $1 < p < \infty$ *thì*

$$\left\|f+g\right\| \leq \left\|f\right\|_{p} + \left\|g\right\|_{p}. \tag{1.5}$$

Định lí 1.3 *Không gian* $L_P(\Omega)$ *với* $1 \leq p \leq \infty$ *là một không gian Banach.*

1.1.3 Không gian $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$

Định nghĩa 1.1 Cho Ω là miền trong của $\mathbb{R}^n$. Hàm $u(x)$ được gọi là khả tích địa phương trong Ω nếu $u(x)$ là một hàm trong Ω và với mỗi $x_0 \in \Omega$ đều tồn tại một lân cận ω của x_0 để $u(x)$ khả tích trong ω.

Định nghĩa 1.2 Cho Ω là miền trong của $\mathbb{R}^n$. Giả sử $u(x), v(x)$ là hai hàm khả tích địa phương trong Ω sao cho ta có hệ thức

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} dx = (-1)^k \int_\Omega v\varphi dx$$

đối với mọi $\varphi(x) \in C_o^k(\Omega), k = k_1 + \dots + k_n, k_i \le 0 (i = 1,2,\dots,n)$. Khi đó, $v(x)$ được gọi là đạo hàm suy rộng cấp k của $u(x)$.

Kí hiệu

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Định nghĩa 1.3 Giả sử p là một số thực, $1 < p < \infty$, Ω là miền trong của $\mathbb{R}^n$. Không gian Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ được định nghĩa như sau:

$$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \middle| u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1,2,\dots,n \right\}.$$

trong đó các đạo hàm trên là các đạo hàm suy rộng.

Với $p = 2$, ta kí hiệu $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) = H^1(\Omega)$, nghĩa là

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \middle| u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1,2,\dots,n \right\}.$$

Bổ đề 1.1

i) *Không gian* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ *là không gian Banach với chuẩn*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

ii) *Không gian* $H^1(\Omega)$ *là không gian Hilbert với tích vô hướng*

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}, \forall u,v \in H^1(\Omega).$$

1.1.4 Khái niệm vết của hàm

Định nghĩa 1.4. Không gian Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ được định nghĩa như các bao đóng của không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω tương ứng với chuẩn của $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.

Không gian $H_0^1(\Omega)$ được định nghĩa bởi

$$H_0^1(\Omega) = \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega).$$