ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THANH HOA

ĐA THỨC TRỰC GIAO TRONG C^n

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THANH HOA

ĐA THỨC TRỰC GIAO TRONG C^n

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH NGUYỄN QUANG DIỆU

THÁI NGUYÊN – 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu trích dẫn đều có nguồn gốc rõ ràng, các kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố ở bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Nguyễn Thanh Hoa

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Nguyễn Quang Diệu. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy về sự hướng dẫn tận tình, hiệu quả với những kinh nghiệm trong quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Xin cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Trường Trung cấp nghề Cao Bằng cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả

Nguyễn Thanh Hoa

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Chúng tôi chọn đề tài *"Đa thức trực giao trong C^n"*. Cụ thể, cho μ là một độ đo Borel dương, hữu hạn trên tập hợp compact $K \subset C^n$. Chúng ta nói rằng (K, μ) thỏa mãn bất đẳng thức Bernstein - Markov nếu, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại hằng số $c = c(\varepsilon) > 0$ sao cho, với mọi đa thức P

$$||P||_K \leq C(1+\epsilon)^{deg(P)}||P||_{L^2(\mu)}$$

Kí hiệu p_α là các đa thức trực giao nhận được nhờ phép trực giao hóa Gram-Schmidt, thì theo một kết quả của Green chúng ta có thể biểu diễn hàm Green đa phức của một tập compact chính quy thông qua dãy các đa thức p_α nói trên.

Nội dung chính của luận văn là nghiên cứu các biến dạng của định lý Zeriahi. Blocki nhưng trong bối cảnh μ là một độ đo dương với giá compact (ta không giả sử μ không thỏa mãn bất đẳng thức Bernstein-Markov), chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ cụ thể về những độ đo μ thỏa mãn các yêu cầu của định lý chính và các điều kiện đủ để μ có tính chất Bernstein-Markov. Đây là những kết quả được lấy ra từ một bài báo của Bloom.

Luận văn bao gồm phần Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trước hết trình bày các khái niệm hàm đa điều hòa dưới, dung tích tương đối, hàm Green đa phức...

Chương 2: Nghiên cứu mối liên hệ giữa hàm Green của hàm độ đo μ và dãy các đa thức trực giao của độ đo μ (Định lý 2.1, định lý 2.2 và định lý 2.3) ngoài ra chúng tôi cũng chỉ ra lớp các độ đo μ thỏa mãn bất đẳng thức Bernstein-Markov.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hòa dưới

1.1.1. Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử* X *là không gian tôpô. Hàm* $u: X \to [-\infty, +\infty)$ *gọi là nửa liên tục trên trên* X *nếu với mỗi* $\alpha \in R$ *tập:*

$$X_\alpha = \{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở trong X. *Hàm* $v: X \to [-\infty, +\infty)$ *gọi là nửa liên tục dưới trên* X *nếu* $-v$ *là nửa liên tục trên trên* X.

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa mang tính địa phương sau:

Giả sử $u: X \to [-\infty, +\infty)$. *Ta nói hàm* u *là nửa liên tục trên tại* $x \in X$ *nếu* $\forall \varepsilon > 0$ *tồn tại lân cận* U_{X_0} *của* x_0 *trong* X *sao cho* $\forall x \in U_{X_0}$ *ta có:*

$$u(x) < u(x_0) + \varepsilon \text{ nếu } u(x_0) \neq -\infty$$

$$u(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \text{ nếu } u(x_0) = -\infty$$

Hàm u gọi là nửa liên tục trên trên X nếu u nửa liên tục trên tại mọi $x_0 \in X$.

Mặt khác nếu ta cho định nghĩa sau: *Giả sử* $E \subset X$ *và* $u: E \to [-\infty, +\infty)$ *là hàm trên E. Giả sử* $x_0 \in \overline{E}$. *Ta định nghĩa*

$$\lim_{x \to x_0} \sup_{x \in E} u(x) = \inf \{\sup\{u(y) : y \in V\}\}$$

ở đó inf lấy trên các V chạy qua các lân cận của x_0. *Khi đó có thể thấy rằng hàm* $u: E \to [-\infty, +\infty)$ *là nửa liên tục trên tại* $x_0 \in X$ *nếu*

$\lim_{x \to x_0} \sup u(x) \le u(x_0)$. Ta định nghĩa hàm điều hòa dưới:

Định nghĩa 1.1.2. *Giả sử* Ω *là tập mở trong C. Hàm* $u: \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *gọi là điều hòa dưới trên* Ω *nếu nó nửa liên tục trên trên* Ω *và thỏa mãn bất* *đẳng thức dưới trung bình trên Ω, nghĩa là với mọi $\omega \in \Omega$ tồn tại Q > 0 sao cho với mọi 0 < r < Q ta có:*

$$u(\omega) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\omega + re^{it}\right)dt \qquad (1.1)$$

Chú ý: Với định nghĩa trên thì hàm đồng nhất $-\infty$ trên Ω được xem là hàm điều hòa dưới trên Ω.Ta kí hiệu tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là SH(Ω). Sau đây là các ví dụ đáng chú ý về hàm điều hòa dưới.

Bổ đề 1.1.3. *Nếu $f : \Omega \to C$ là hàm chỉnh hình trên Ω thì $\log|f|$ là hàm điều hòa dưới trên Ω.*

Chứng minh. Trường hợp $f \equiv 0$ trên Ω thì kết quả là rõ ràng. Giả sử $f \neq 0$ trên Ω, Khi đó rõ ràng $\log|f|$ là hàm nửa liên tục trên trên Ω. Giả sử $\omega \in \Omega$. Nếu $f(\omega) \neq 0$ thì chọn $\rho > 0$ sao cho $f \neq 0$ trên $B(\omega,\rho) = \{z \in \Omega : |z-\omega| < \rho\}$. Khi đó $\log|f|$ là hàm điều hòa trên $B(\omega,\rho) = \{z \in \Omega : |z-\omega| < \rho\}$ nên (l.l) được thỏa mãn với dấu đẳng thức. Trường hợp $f(\omega) = 0$. Khi đó $\log|f| = -\infty$ và do đó (l.l) luôn đúng. □

Bổ đề 1.1.4. *Giả sử u,v là các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trong C. Khi đó:*

(i) max(u,v) là hàm điều hòa dưới trên Ω.

(ii) Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là một nón, nghĩa là nếu $u, v \in SH(\Omega)$ và $\alpha, \beta > 0$ thì $\alpha u + \beta v$ cũng thuộc $SH(\Omega)$.

Định lý 1.1.5. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên miền bị chặn Ω trên C. Khi đó:*

(i) Nếu u đạt cực đại toàn thể tại một điểm trên Ω thì u là hằng số trên Ω.

(ii) Nếu $\limsup_{z \to \varsigma} u(z) \le 0$ đối với mọi $\varsigma \in \partial\Omega$ thì $u \le 0$ trên Ω.

Chứng minh: (i) Giả sử u nhận giá trị cực đại M tại điểm $z_0 \in \Omega$. Đặt $A = \{z \in \Omega : u(z) < M\}$ và $B = \{z \in \Omega : u(z) = M\}$

Khi đó A là tập mở vì u là hàm nửa liên tục trên. Từ bất đẳng thức dưới trung bình ta thấy B cũng là tập mở. Ta có $\Omega = A \cup B, A \cap B \neq \varnothing$. Do đó hoặc $A = \Omega$ hoặc $B = \Omega$. Nhưng theo giả thiết $B \neq \varnothing$ nên $B = \Omega$ và (i) được chứng minh.

(ii) Mở rộng u lên $\overline{\Omega}$ nhờ đặt $u(\varsigma) = \limsup\limits_{z \to \varsigma} u(z)$, $(\varsigma \in \partial\Omega)$. Do $\overline{\Omega}$ là tập compact nên *u* đạt cực đại tại $\omega \in \overline{\Omega}$. Nếu $\omega \in \partial\Omega$ thì do giả thiết $u(\omega) \leq 0$. Do đó $u \leq 0$ trên Ω. Trường hợp $\omega \in \Omega$ theo (i) *u* là hằng số trên Ω. Do đó nó hằng số trên $\overline{\Omega}$ và vậy thì $u \leq 0$ trên Ω. □

Sau đây là tiêu chuẩn nhận biết khi nào một hàm nửa liên tục trên là hàm điều hòa dưới.

Định lý 1.1.6. *Giả sử* Ω *là tập mở trong C và u là hàm nửa liên tục trên* Ω. *Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) u là hàm điều hòa dưới trên Ω.

(ii) Với mọi $\omega \in \Omega$, *tồn tại* $\varsigma > 0$ *sao cho* $\overline{\Delta}(\omega, \varsigma > 0) \subset \Omega$ *và với mọi* $0 \leq r < \varsigma, 0 \leq t < 2\pi$ *ta có:*

$$u\left(\omega + re^{it}\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varsigma^2 - r^2}{\varsigma^2 - 2\varsigma r \cos(\theta - t) + r^2} u\left(\omega + \varsigma e^{i\theta}\right) d\theta$$

ở đó $\overline{\Delta}(\omega, \varsigma > 0) = \{z \in \Omega : |z - \omega| < \varsigma\}$ *là đĩa đóng tâm* ω *bán kính* ς.

(iii) Với mọi miền D compact tương đối trong Ω *và h là hàm điều hòa trên D, liên tục trên* $\overline{D}$ *thỏa mãn:*

$$\limsup_{z \to \varsigma} (u - h)(z) \leq 0 \quad (\varsigma \in \partial D)$$

ta có $u \leq h$ *trên D.*

Hệ quả 1.1.7. *Nếu u là hàm điều hòa dưới trên tập mở* Ω *và nếu* $\overline{\Delta}(\omega, \varsigma) \subset \Omega$ *thì:*

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(\omega + \varsigma e^{i\theta}\right) d\theta$$

Định lý 1.1.8. *Giả sử* $u \in C^2(\Omega)$. *Khi đó u là điều hòa dưới trên* Ω *khi và chỉ khi* $\Delta u \geq 0$ *trên* Ω *ở đó* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *là Laplace của u.*

Chứng minh. Giả sử $\Delta u \geq 0$ trên Ω. Lấy *D* là miền compact tương đối trong Ω và *h* là hàm điều hòa trên *D*, liên tục trên *D* sao cho: $\limsup_{z \to \varsigma} (u-h)(z) \leq 0$ đối với mọi $\varsigma \in \partial D$. Với $\varepsilon > 0$, xác định

$$v_\varepsilon(z) = \begin{cases} u(z) - h(z) + \varepsilon |z|^2 & \text{nếu } z \in D \\ \varepsilon |z|^2 & \text{nếu } z \in \partial D \end{cases}$$

Khi đó, v_ε nửa liên tục trên $\overline{D}$ nên nó đạt cực đại trên $\overline{D}$. Tuy nhiên do $\Delta v_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$ trên *D* nên v_ε đạt cực đại trên ∂D. Do đó $u - h \leq \sup_{\partial D} \varepsilon |z|^2$ trên *D*. Cho $\varepsilon \to 0$ ta được $u \leq h$ trên *D* và do đó *u* điều hòa dưới trên *D*.

Ngược lại, giả sử *u* là hàm điều hòa dưới trên Ω. Giả thiết tại $\omega \in \Omega$ ta có $\Delta u(\omega) < 0$. Do đó có $\varsigma > 0$ sao cho $\Delta u \leq 0$ trên $\Delta(\omega, \varsigma)$. Do đó *u* là hàm điều hòa trên $\Delta(\omega, \varsigma)$. Vậy $\Delta u(\omega) = 0$ và gặp mâu thuẫn. Do đó $\Delta u \geq 0$ và định lí được chứng minh. □

Định lý 1.1.9. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên tập mở* Ω_1 *và v là hàm điều hòa dưới trên tập mở* $\Omega_2 \subset \Omega_1$. *Giả thiết* $\limsup_{z \to \varsigma} v(z) \leq u(\varsigma)$, *với mọi* $\varsigma \in \Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. *Khi đó hàm* $\tilde{u}$ *xác định trên* Ω_1:

$$\tilde{u} = \begin{cases} \max(u, v) & \text{trên } \Omega_2 \\ u & \text{trên } \Omega_1 \setminus \Omega_2 \end{cases}$$

là điều hòa dưới trên Ω_1.

Chứng minh. Từ điều kiện $\limsup_{z \to \varsigma} v(z) \leq u(\varsigma)$, với mọi $\varsigma \in \Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ suy ra hàm $\tilde{u}$ nửa liên tục trên trên Ω_1. Dễ thấy $\tilde{u}$ thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình tại mọi $\omega \in \Omega_2$. Do $\tilde{u} \geq u$ trên Ω_1 nên $\tilde{u}$ cũng thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình tại mọi $\omega \in \Omega_1 \setminus \Omega_2$. Định lí được chứng minh. □