ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ QUYÊN

HÀM CƠ SỞ THEO BÁN KÍNH VÀ ỨNG DỤNG GIẢI BÀI TOÁN DIRICHLET VỚI PHƯƠNG TRÌNH POISSON

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ QUYÊN

HÀM CƠ SỞ THEO BÁN KÍNH VÀ ỨNG DỤNG GIẢI BÀI TOÁN DIRICHLET VỚI PHƯƠNG TRÌNH POISSON

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Giáo viên hướng dẫn:
TS. ĐẶNG THỊ OANH

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu

Nhiều hiện tượng khoa học và kỹ thuật dẫn đến các bài toán biên của phương trình vật lý toán. Giải các bài toán đó đến đáp số bằng số là một yêu cầu quan trọng của thực tiễn. Trong một số ít trường hợp thật đơn giản việc đó có thể làm được nhờ vào nghiệm tường minh của bài toán dưới dạng các công thức sơ cấp, các tích phân hoặc các chuỗi hàm. Còn trong đại đa số trường hợp khác, đặc biệt là đối với các bài toán có hệ số biến thiên, các bài toán phi tuyến, các bài toán trên miền bất kỳ thì nghiệm tường minh của bài toán không có, hoặc có nhưng rất phức tạp. Trong những trường hợp đó việc tính nghiệm phải dựa vào các phương pháp giải gần đúng. Đã có nhiều phương pháp truyền thống giải bài toán này như phương pháp sai phân hữu hạn ([5], [7], [8]), phương pháp phần tử hữu hạn([1], [6]),...

Tuy nhiên để sử dụng các phương pháp này cần dựa trên lưới. Trong nhiều trường hợp bài toán có miền hình học đơn giản, hoặc hàm không có tính chất dao động lớn thì các phương pháp trên dễ dàng thực hiện.

Vì vậy trong những năm gần đây một xu hướng mới để giải phương trình đạo hàm riêng ra đời. Đó là phương pháp không lưới. Một trong các cách tiếp cận này là phương pháp không lưới sử dụng nội suy hàm RBF theo hướng nội suy địa phương.

Đề tài tìm hiểu một phương pháp giải phương trình đạo hàm riêng dựa trên hàm cơ sở theo bán kính. Đây là phương pháp được nhiều nhà khoa học trên thế giới quan tâm trong những năm gần đây. Mục đích của đề tài là sử dụng hàm cơ sở bán kính giải phương trình Poisson với điều kiện biên Dirichlet trong các miền hình học 2D, lợi thế của cách tiếp cận này là không cần tính lưới, chi phí cho việc tính toán lưới trên bị loại trừ. Hơn nữa cách tiếp cận sử dụng nội suy hàm RBF dễ dàng trong các trường hợp: dữ liệu phân bố phân tán, miền có hình học phức tạp và số chiều không gian cao vì hàm RBF chỉ làm việc với khoảng cách, chuyển nhiều chiều về một chiều.

Đề tài được trình bày trong 3 chương:

Chương 1: Trình bày những kiến thức cơ sở về hệ phương trình và một số cách giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Đồng thời đưa ra các kiến thức cơ sở về nội suy hàm số theo phương pháp cổ điển và nội suy hàm cơ sở theo bán kính.

Chương 2: Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn trên miền hình chữ nhật và rời rạc bài toán Dirichlet với phương trình Poisson.

Chương 3 : Một số thử nghiệm giải phương trình Poisson với điều kiện biên Dirichlet.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học-Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán-Tin, Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới TS. Đặng Thị Oanh, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 08 năm 2013.

Người thực hiện

Phạm Thị Quyên.

Chương 1

Một số kiến thức bổ trợ

1.1 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Xét một hệ phương trình gồm n phương trình tuyến tính với n ẩn số $x_1, x_2, \cdots, x_n$ được cho bởi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = & b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

Hệ này có thể viết dưới dạng ma trận $Ax = b$, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T.$$

Nếu $detA \neq 0$ thì hệ (1.1) có nghiệm duy nhất và nghiệm của nó có thể tính theo công thức Cramer:

$$x_j = \frac{detA_j}{detA} \tag{1.2}$$

trong đó A_j là ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bởi cột b.

Công thức (1.2) thường chỉ giành cho hệ với ma trận hệ số cỡ nhỏ, còn với ma trận cỡ lớn thì chi phí cho tính toán quá lớn. Do đó, người ta đã đi xây dựng các phương pháp nhanh để giải hệ phương trình đại số tuyến tính cỡ lớn là khai thác triệt để các thông tin về ma trận của hệ.

Dưới đây là một số dạng đặc biệt của ma trận:

1) Ma trận đường chéo : Ma trận vuông cấp n mà mọi phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0, tức là $a_{ij} = a_{ji}$, với $i \neq j$, được gọi là ma trận đường chéo.

2) Nếu ma trận đường chéo có $a_{ii} = 1,\ i = 1, 2, \cdots, n$ thì ta gọi A là ma trận đơn vị và ta thường kí hiệu là E hoặc I.

3) Ma trận tam giác trên: Ma trận vuông A được gọi là ma trận tam giác trên, nếu A có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

tức là $a_{ij} = 0$ nếu $i > j$.

4) Ma trận tam giác dưới: Tương tự ma trận vuông A được gọi là ma trận tam giác dưới, nếu A có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

tức là $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$.

5) Ma trận thưa: Ma trận thưa là ma trận có rất nhiều phần tử bằng 0.

6) Ma trận đối xứng: Ma trận A được gọi là ma trận đối xứng nếu $A = A^*$, tức là $a_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

1.2 Một số phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính

1.2.1 Chuẩn của ma trận, chuẩn của véc tơ

a) Chuẩn của ma trận

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận cấp $m \times n$. Chuẩn của ma trận A được cho bởi:

i) Chuẩn dòng

$||A||_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

ii) Chuẩn cột

$||A||_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

iii) Chuẩn Euclide

$||A||_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2}$

b) Chuẩn của vectơ

Cho vectơ $x = (x_1,\ x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có một số chuẩn như sau:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;\ \ ||x||_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Big)^{1/2};\ \ ||x||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

1.2.2 Phương pháp Gauss

Đây là phương pháp trực tiếp giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Ý tưởng của phương pháp khử Gauss là khử dần các ẩn để đưa hệ ban đầu về hệ với ma trận tam giác trên bằng các phép biến đổi tương đương:

1) Đổi chỗ hai phương trình bất kì.

2) Nhân một phương trình với một số khác không.

3) Cộng vào phương trình một tổ hợp tuyến tính của một phương trình khác.

Như vậy phương pháp Gauss gồm hai quá trình:

Quá trình thuận: Đưa hệ về dạng tam giác trên.

Quá trình ngược: Giải hệ tam giác trên từ dưới lên trên.

a) Quá trình thuận : Để viết gọn ta xét hệ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & a_{2,n+1} \\ \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = & a_{n,n+1} \end{cases} \tag{1.3}$$

và đặt $a_{ij}^{(0)} = a_{ij},\ (i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, ..., n + 1)$.

Bước 1: Dùng phương trình đầu tiên để khử x_1 trong $n - 1$ phương trình còn lại. Giả sử $a_{11} \neq 0$ (ta luôn có được điều này bằng cách đổi chỗ hai phương trình). Chia hai vế của phương trình thứ nhất cho a_{11} ta được phương trình:

$$x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = b_{1,n+1} \tag{1.4}$$

với $b_{1j} = \dfrac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}},\ j = 2, ..., n + 1$.

Cộng vào phương trình thứ i của hệ (1.3) phương trình (1.4) sau khi đã nhân với $-a_{i1}^{(0)},\ i = 2, \cdots, n$ ta được hệ

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = & a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(1)}x_n = & a_{3,n+1}^{(1)} \\ \cdots & \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = & a_{n,n+1}^{(1)} \end{cases} \tag{1.5}$$

với $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(1)}b_{1j},\ i = 2, ..., n;\ j = 2, ..., n + 1$.

Như vậy sau bước 1 ta thu được phương trình (1.4) và hệ (1.5).

Bước 2: Dùng phương trình đầu tiên trong (1.5) khử x_2 trong các phương trình còn lại tương tự như đã làm trong bước 1. Quá trình được tiếp tục như vậy. Kết quả sau bước thứ m ta thu được hệ

$$x_m + b_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + b_{m,n}x_n = b_{m,n+1}$$
$$a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \cdots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n = a_{m+1,n+1}^{(m)}$$