ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM NGỌC HẢI

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM NGỌC HẢI

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. VŨ NGỌC PHÁT

Thái Nguyên – 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu trích dẫn đều có nguồn gốc rõ ràng, các kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố ở bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Phạm Ngọc Hải

MỤC LỤC

MỘT SỐ KÍ HIỆU TOÁN HỌC DÙNG TRONG LUẬN VĂN

- $\mathbf{R}^+$: Tập các số thực không âm.
- $\mathbf{R}^n$: Không gian véc tơ n- chiều với kí hiệu tích vô hướng là $\langle .,. \rangle$
- $\mathbf{R}^{n\times r}$: Không gian các ma trận $(n\times r)$- chiều.
- $C([a,b],\mathbf{R}^n)$: Tập các hàm liên tục trên $[a,b]$ và nhận giá trị trên $\mathbf{R}^n$.
- $L_2([a,b],\mathbf{R}^m)$: Tập các hàm khả tích bậc hai trên $[a,b]$ và lấy giá trị trong $\mathbf{R}^m$.
- A': Ma trận chuyển vị của ma trận A.
- I: Ma trận đơn vị.
- A^{-1}: Ma trận nghịch đảo của ma trận A.
- $rank\, A$: Hạng của ma trận A.

LỜI MỞ ĐẦU

Lý thuyết điều khiển toán học là một trong những lĩnh vực toán học ứng dụng quan trọng của lý thuyết định tính phương trình vi phân. Lý thuyết điều khiển được khởi xướng bởi những ý tưởng và kết quả quan trọng của nhà toán học R. Kalman từ những năm 60, trong đó đã chứng minh một điều kiện đại số về tính điều khiển được hệ tuyến tính đơn giản.

Trải qua hơn một thế kỷ, lý thuyết điều khiển ngày càng phát triển mạnh mẽ như một chuyên ngành độc lập của toán học ứng dụng với sự kết hợp của toán học và điều khiển kỹ thuật. Hiện nay lý thuyết này được nhiều nhà toán học trên thế giới và trong nước quan tâm nghiên cứu như: R. Kalman, RP Agarwal, V. Korobov, Vũ Ngọc Phát, Nguyễn Khoa Sơn,…và thu được nhiều kết quả, tính chất quan trọng.

Một trong những vấn đề đầu tiên và quan trọng nhất trong các bài toán điều khiển hệ thống là tính điều khiển được, tức là xác định điều khiển chấp nhận được sao cho hệ thống chuyển từ vị trí này tới vị trí khác trong một thời gian hữu hạn nào đó. Bài toán điều khiển được liên quan chặt chẽ đến các bài toán khác như bài toán điều khiển tối ưu, bài toán ổn định và ổn định hóa, bài toán quan sát được,…

Như chúng ta biết công cụ chính để nghiên cứu những vấn đề trong lý thuyết điều khiển toán học là những mô hình và các phương pháp toán học được ứng dụng để giải quyết những vấn đề định tính của các hệ thống điều khiển. Trong luận văn này, chúng tôi tập trung nghiên cứu các mô hình động lực mô tả bằng các hệ phương trình tuyến tính có cấu trúc đơn giản. Luận văn giới thiệu một cách tổng quan các bài toán điều khiển được các hệ động lực mô tả bởi phương trình điều khiển với thời gian liên tục và rời rạc khác nhau.

Nội dung luận văn gồm 36 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận, danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Cơ sở toán học.

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về hệ phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân tuyến tính, các bài toán điều khiển được đối với hệ điều khiển tuyến tính liên tục. Cuối chương, chúng tôi trình bày các bài toán điều khiển được đối với hệ điều khiển với thời gian rời rạc.

Chương 2: Bài toán điều khiển được hệ phương trình vi phân tuyến tính.

Trong chương này, chúng tôi trình bày các điều kiện đủ về tính điều khiển được các hệ phương trình vi phân tuyến tính và một số ví dụ minh họa.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn chân thành nhất đến GS.TSKH Vũ Ngọc Phát, người thầy đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Đồng thời, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn tới các thầy cô ở khoa Toán, khoa Sau đại học, trường Đại học Sư Phạm – Đại học Thái Nguyên, trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã tạo điều kiện giúp đỡ, chỉ bảo tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu tại trường. Cuối cùng tôi xin cảm ơn những người thân, bạn bè, đồng nghiệp, những người luôn ủng hộ, động viên và là chỗ dựa tinh thần cho tôi trong suốt quá trình học tập, làm việc, nghiên cứu cũng như trong cuộc sống.

Mặc dù bản thân đã cố gắng rất nhiều, nhưng do thời gian thực hiện luận văn không nhiều, kiến thức và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những hạn chế và sai sót. Tôi rất mong nhận được sự chỉ bảo, góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

CƠ SỞ TOÁN HỌC

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm toán học cơ sở về hệ phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân tuyến tính, nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính, lý thuyết điều khiển được hệ phương trình vi phân tuyến tính.

1.1. Hệ phương trình vi phân

1.1.1. Hệ phương trình vi phân

Xét hệ phương trình vi phân có dạng:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ t \geq t_0, \\ x(t_0) = x_0,\ t_0 \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n}$, với mỗi $t \geq t_0$.

Hàm khả vi liên tục $x(t)$ thỏa mãn hệ phương trình (1.1.1) được gọi là nghiệm của hệ phương trình vi phân đó và được ký hiệu là $x(t, x_0)$.

Công thức nghiệm dạng tích phân của hệ (1.1.1) là

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Các định lý sau đây khẳng định sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ phương trình vi phân (1.1.1) (xem [2]).

Định lý 1.1.1. *(Định lý Picard – Lindeloff)*

Xét hệ phương trình vi phân (1.1.1) *trong đó giả sử* $f : I \times D \to \mathbf{R}^n$

$I = \ t_0, t_0 + b$ *liên tục theo t và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo x:*

$$\exists K > 0 : \| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq K \| x_1 - x_2 \|,\ \forall t \geq 0.$$

Khi đó, với mỗi $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}^+ \times D$ *sẽ tìm được một số* $d > 0$ *sao cho hệ phương trình* (1.1.1) *có nghiệm duy nhất trên khoảng* $x_0 + d, x_0 - d$ *. Hay nói cách khác, qua mỗi điểm* $(t_0, x_0) \in I \times D$ *có một và chỉ một đường cong tích phân chạy qua.*

Định lý 1.1.2. *(Định lý Caratheodory)*

Giả sử $f(t,x)$ *là hàm đo được theo* $t \in I$ *và liên tục theo* $x \in D$*. Nếu tồn tại hàm khả tích* $m(t)$ *trên* $t_0, t_0 + b$ *sao cho*

$$\| f(t,x) \| \le m(t), \ \forall (t,x) \in I \times D,$$

thì hệ (1.1.1) *có nghiệm trên khoảng* $t_0, t_0 + \beta$ *nào đó.*

Với một số giả thiết thêm trên của hàm $f(t,x)$ thì nghiệm $x(t, x_0)$ được xác định trên $0, +\infty$ (xem [2]) .

Đặc biệt, đối với các hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t), t \ge 0,$$

trong đó $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}, \forall t, g(t) : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ là các hàm liên tục thì luôn luôn tồn tại nghiệm $x(t, x_0)$ xác định trên toàn khoảng $0, +\infty$.

1.1.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính ôtônôm

Hệ phương trình vi phân tuyến tính ôtônôm có dạng :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + g(t), & t \in \mathbf{R}^+, \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \ge 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

trong *đó A là* $n \times n$ *- ma trận hằng số,* $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ *là hàm liên tục.*

Nghiệm của hệ phương trình được biểu diễn bởi công thức CauChy

$$x(t, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} g(s) ds, \quad t \ge 0.$$

1.1.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm

Hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có dạng:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t), \quad t \in \mathbf{R}^+, \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

trong đó $A(t)$ *là* $n \times n$ *- ma trận các hàm số liên tục trên* $\mathbf{R}^+, g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ *là hàm liên tục.*

Nghiệm của hệ phương trình (1.1.3) được biểu diễn ma trận nghiệm cơ bản $\phi(t,s)$ của hệ thuần nhất

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), t \geq 0, \tag{1.1.4}$$

và được cho bởi công thức tích phân

$$x(t) = \phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t,s)g(s)ds, t \geq 0,$$

trong đó $\phi(t,s)$ là ma trận nghiệm cơ bản thỏa mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi(t,s) = A(t)\phi(t,s), \quad t \geq s, \\ \phi(s,s) = I. \end{cases}$$

Định lý 1.1.3.[1]. Cho $\phi(t,s)$ là ma trận nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất (1.1.4). Khi đó

i) Mọi nghiệm của hệ (1.1.2) với $x(t_0) = x_0$ là

$$x(t) = \phi(t,t_0)x_0.$$

ii) Nếu $\phi(t,t_0)$ là ma trận nghiệm cơ bản khác của hệ (1.1.2) thì

$$\phi(t,t_0) = \phi_1(t,t_0)C, \quad \forall t \geq t_0,$$

trong đó C là ma trận hằng số nào đó.

iii) Nếu C là ma trận nghiệm cơ bản thì $\phi(t,t_0)C$ cũng là ma trận nghiệm cơ bản.

Chứng minh: i) Suy ra ngay từ công thức nghiệm Cauchy. Để chứng minh ii) ta ký hiệu $\phi(t,t_0) = \phi(t)$. Ta đặt

$$\phi^{-1}(t)\phi_1(t) = \psi(t).$$