ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH CÔNG SƠN

XẤP XỈ THEO DUNG LƯỢNG CỦA HÀM CHỈNH HÌNH BỞI CÁC HÀM HỮU TỶ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH CÔNG SƠN

XẤP XỈ THEO DUNG LƯỢNG CỦA HÀM CHỈNH HÌNH BỞI CÁC HÀM HỮU TỶ

Chuyên nghành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. NGUYỄN QUANG DIỆU

THÁI NGUYÊN - 2013

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Giáo sư Nguyễn Quang Diệu, Đại học sư phạm Hà Nội. Em xin được bày tỏ lòng biêt ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường. Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K19 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm Luận văn. Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên Luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2013

Tác giả

Đinh Công Sơn

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu trích dẫn đều có nguồn gốc rõ ràng, các kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố ở bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Đinh Công Sơn

Xác nhận của cán bộ hướng dẫn | Xác nhận của trưởng khoa chuyên môn

GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu

Mục lục

Mở đầu

Ký hiệu $\Re$ là tập hợp các hàm giải tích f xác định trên một lân cận của $0 \in \mathbb{C}^n$ sao cho tồn tại dãy các hàm hữu tỷ $\{r_n\}$,deg $r_n \leqslant n$ sao cho:$|f - r_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$ trên một lân cận U của $0 \in \mathbb{C}^n$. Một ví dụ về tập $\Re$ là các hàm phân hình $f = \dfrac{g}{h}$, g và h là các hàm nguyên. Trong trường hợp này ta có thể chọn: $r_n = \dfrac{T_n(g)}{T_n(h)}$ ở đây $T_n(g), T_n(h)$ là các đa thức Taylor bậc n của g và h. Một kết quả quan trọng của Goncar[G3] nói rằng nếu $f \in \Re$ thì tồn tại W_f của f là đơn trị và dãy $\{r_n\}$ sẽ hội tụ nhanh về f theo độ đo trên W_f . Nội dung chính của luận văn là trình bày lại một kết quả của Bloom nói rằng khẳng định trên của Goncar vẫn còn đúng nếu dãy $\{r_n\}$ chỉ hội tụ nhanh theo dung lượng trên một tập con không đa cực. Luận văn bao gồm phần Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị, trước hết trong mục 1.1 trình bày khái quát về hàm điều hòa dưới, hàm đa điều hòa dưới. Trong các mục tiếp theo giới thiệu dung lượng tương đối $C(K, D)$, hội tụ theo dung lượng.

Chương 2: Chứng minh rằng khẳng định của Goncar vẫn còn đúng nếu dãy chỉ hội tụ nhanh theo dung lượng trên một tập con không đa cực.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Hàm đa điều hòa dưới

1.1.1 Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử X là không gian tôpô. Hàm u: X* $\to [-\infty; +\infty)$ *gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mỗi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tập*

$$X_\alpha = \{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở trong X. Hàm v: X $\to (-\infty; +\infty]$ *gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu -v là nửa liên tục trên trên X.*

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa mang tính địa phương sau:

Giả sử $u : X \to [-\infty; +\infty)$*. Ta nói hàm u là nửa liên tục trên tại* $x \in X$ *nếu* $\forall \varepsilon > 0$ *tồn tại lân cận* U_{x_0} *của* x_0 *trong X sao cho* $\forall x \in U_{x_0}$ *ta có:*

$$u(x) < u(x_0) + \varepsilon, \text{ nếu } u(x_0) \neq -\infty,$$
$$u(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ nếu } u(x_0) = -\infty.$$

Hàm u gọi là nửa liên tục trên trên X nếu u nửa liên tục trên tại mọi $x_0 \in X$*.*

Mặt khác nếu ta định nghĩa: giả sử $E \subset X$ và u: $E \to [-\infty; +\infty)$ là hàm trên E. Giả sử $x_0 \in \overline{E}$. Ta định nghĩa:

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u(x) = \inf\{\sup\{u(y) : y \in V\}\}, \tag{1.1}$$

ở đó inf lấy trên các V chạy qua các lân cận của x_0. Khi đó có thể thấy rằng hàm u: $X \to [-\infty; +\infty)$ là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu $\limsup\limits_{x \to x_0} u(x) \leqslant u(x_0)$.

Định nghĩa 1.1.2.

Giả sử Ω *là tập mở trong* $\mathbb{C}$. *Hàm* u: $\Omega \to [-\infty; +\infty)$ *gọi là điều hòa dưới trên* Ω *nếu nó nửa liên tục trên trên* Ω *và thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên* Ω, *nghĩa là với mọi* $\omega \in \Omega$ *tồn tại* $\tau > 0$ *sao cho với mọi* $0 \leqslant r < \tau$ *ta có:*

$$u(\omega) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\omega + re^{it}) dt$$

Chú ý: Với định nghĩa trên thì hàm đồng nhất $-\infty$ trên Ω được xem là hàm điều hòa dưới trên Ω. Ta kí hiệu tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là $SH(\Omega)$. Sau đây là các ví dụ đáng chú ý về hàm điều hòa dưới.

Bổ đề 1.1.3. *Nếu* f: $\Omega \to \mathbb{C}$ *là hàm chỉnh hình trên* Ω *thì* $\log|f|$ *là hàm điều hòa dưới trên* Ω.

Chứng minh: Trường hợp $f \equiv 0$ trên Ω thì kết quả là rõ ràng. Giả sử $f \neq 0$ trên Ω. Giả sử $\omega \in \Omega$, nếu $f(\omega) \neq 0$ thì chọn $\tau > 0$ sao cho $f \neq 0$ trên $B(\omega, \tau) = \{\, z \in \Omega : |z - \omega| < \tau \}$. Khi đó $\log|f|$ là hàm điều hòa trên $B(\omega, \tau) = \{\, z \in \Omega : |z - \omega| < \tau \}$ nên (1.1) được thỏa mãn với dấu đẳng thức. Trường hợp $f(\omega) = 0$, khi đó $\log|f(\omega)| = -\infty$ và do đó (1.1) luôn đúng.

Bổ đề 1.1.4. *Giả sử u,v là các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trong $\mathbb{C}$. Khi đó:*

(i) max(u,v) là hàm điều hòa dưới trên Ω.

(ii) Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là một nón, nghĩa là nếu $u, v \in SH(\Omega); \alpha, \beta > 0$ thì $\alpha u + \beta v \in SH(\Omega)$.

Định lý 1.1.5. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên miền bị chặn Ω trên $\mathbb{C}$. Khi đó:*

(i) Nếu u đạt cực đại toàn thể tại một điểm trên Ω thì u là hằng số trên Ω.

(ii) Nếu $\limsup\limits_{z \to \varsigma} u(z) \leqslant 0$ đối với mọi $\varsigma \in \partial\Omega$ thì $u \leqslant 0$ trên Ω

Chứng minh

(i) Giả sử u nhận giá trị cực đại M tại điểm $z_0 \in \Omega$.

Đặt $A = \{z \in \Omega : u(z) < M\}; B = \{z \in \Omega : u(z) = M\}$. Khi đó A là tập mở vì u là hàm nửa liên tục trên. Từ bất đẳng thức dưới trung bình ta thấy B cũng là tập mở. Ta có $\Omega = A \cup B, A \cap B = \phi$. Do đó hoặc $A = \Omega$ và $B = \Omega$. Nhưng theo giả thiết $B \neq \phi$ nên $B = \Omega$ và (i) được chứng minh.

(ii) Mở rộng u lên $\overline{\Omega}$ nhờ đặt $u(\varsigma) = \limsup\limits_{z \to \varsigma} u(z), (\varsigma \in \partial\Omega)$. Do $\overline{\Omega}$ là tập compact nên u đạt cực đại tại $\omega \in \overline{\Omega}$. Nếu $\omega \in \partial\Omega$ thì do giả thiết $u(\omega) \leqslant 0$. Do đó $u \leqslant 0$ trên Ω.

Trường hợp $\omega \in \Omega$ thì theo (i) u là hằng số trên Ω. Do đó nó là hằng số trên $\overline{\Omega}$, vậy thì $u \leqslant 0$ trên Ω.

Sau đây là tiêu chuẩn nhận biết khi nào một hàm nửa liên tục trên là hàm điều hòa dưới.

Định lý 1.1.6. *Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) u là hàm điều hòa dưới trên Ω.

(ii) Với mọi $\omega \in \Omega$, tồn tại $\tau > 0$ sao cho $\Delta(\omega, \tau > 0) \subset \Omega$ và với mọi $0 \leqslant r < \tau, 0 \leqslant t < 2\pi$ ta có:

$$u(\omega + re^{it}) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\tau^2 - r^2}{\tau^2 - 2\tau r\cos(\theta - t) + r^2} u(\omega + \tau e^{i\theta})d\theta.,$$

ở đó $\overline{\Delta}(\omega, \tau > 0) = \{\, z \in \Omega : |z - \omega| \leqslant \tau\}$ là đĩa đóng tâm ω bán kính τ.

(iii) Với mọi miền D compact tương đối trong Ω và h là hàm điều hòa trên D, liên tục trên $\overline{D}$ thỏa mãn:

$$\lim_{z \to \varsigma} \sup (u - h)(z) \leqslant 0 (\varsigma \in \partial D) \qquad \text{ta có } u \leqslant h \text{ trên } D.$$

Hệ quả 1.1.7. *Nếu u là hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω và nếu $\overline{\Delta}(\omega, \tau) \subset \Omega$ thì:*

$$u(\omega) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\omega + \tau e^{i\theta})d\theta \qquad .$$

Định lý 1.1.8. *Giả sử $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, khi đó u là hàm điều hòa dưới trên Ω khi và chỉ khi $\Delta u \geq 0$, ở đó $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ là Laplace của u.*

Chứng minh. Giả sử $\Delta u \geqslant 0$ trên Ω. Lấy D là miền compact tương đối trong Ω và h điều hòa trên D, liên tục trên $\overline{D}$ sao cho:

$$\lim_{z \to \varsigma} \sup (u - h)(z) \leqslant 0 (\varsigma \in \partial D) \qquad .$$

Với $\varepsilon > 0$ xác định