ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

ĐỖ THỊ HOÀNG ÁNH

TÍCH CHẬP SUY RỘNG VỚI HÀM TRỌNG ĐỐI VỚI CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN HARTLEY FOURIER SINE VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN MINH KHOA

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Một số ký hiệu dùng trong luận văn

- $\mathbb{R}_+$ là tập số thực dương.
- $L(\mathbb{R})$ là tập các hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$$

- $L(\mathbb{R}_+)$ là tập các hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$\int_{0}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$$

- f là hàm thực hoặc phức xác định trên $\mathbb{R}$

$$casx = \cos x + \sin x$$

Lời cảm ơn

Hoàn thành luận văn, từ đáy lòng mình em xin gửi tới thầy TS. Nguyễn Minh Khoa sự hàm ơn sâu sắc. Em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô giáo trong khoa Toán, phòng sau Đại học Đại Học Khoa Học – Đại Học Thái Nguyên đã giảng dạy, tạo điều kiện giúp đỡ em.

Đồng thời xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã tận tình giúp em hoàn thành quá trình học tập và viết luận văn.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 1 tháng 08 năm 2013.

Học viên

Đỗ Thị Hoàng Ánh

Lời mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Cùng với sự phát triển liên tục của các phép biến đổi tích phân, một hướng rẽ nhánh phát triển mới của các phép biến đổi tích phân là tích chập của các phép biến đổi tích phân xuất hiện vào khoảng đầu thế kỷ 20. Ngót một thế kỷ trôi qua kể từ buổi đầu khai sinh của tích chập ta nhận thấy ban đầu tích chập chỉ được xét đối với từng phép biến đổi tích phân và phổ biến nhất được ứng dụng rộng rãi nhất là tích chập của phép biến đổi tích phân Fourier. Thuộc tính đặc trưng của tích chập loại này là trong đẳng thức nhân tử hóa chỉ có mặt một phép biến đổi tích phân. Điều này bó hẹp phạm vi ứng dụng của tích chập. Ngoài trừ tích chập suy rộng đối với hai phép biến đổi tích phân Fourier Sine, Fourier Cosine được Sneldon công bố năm 1951 [5] thì phải đợi đến gần hai thập kỷ trở lại đây tích chập suy rộng mới được xây dựng bởi các tác giả Nguyễn Xuân Thảo, Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Minh Khoa, Yakubovich...

Tích chập , tích chập suy rộng có nhiều ứng dụng lý thú trong một số lĩnh vực của khoa học kỹ thuật và toán học [2, 5, 9,...] Một số tích chập đã biết được dùng trong luân văn Tích chập của hai hàm $f, g \in L(\mathbb{R})$ đối với phép biến đổi Fourier Cosine [9]

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Trình bày định nghĩa, các tính chất của các phép biến đổi tích phân Fourier Sine, Hartley và nêu các ví dụ áp dụng. Xây dựng và nghiên cứu tích chập suy rộng mới đối với các phép biến đổi tích phân Fourier Sine, Hartley và ứng dụng để giải phương trình, hệ phương trình tích phân dạng chập.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu các phép biến đổi tích phân, tích chập suy rộng của các phép biến đổi tích phân Fourier Sine, Hartley và ứng dụng vào giải phương trình tích phân, hệ phương trình tích phân dạng chập.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phép biến đổi tích phân, lý thuyết phương trình tích phân và các kết quả của giải tích, giải tích hàm.
- Sử dụng phương pháp kiến thiết tích chập có hàm trọng của V.A. Kakichev, Nguyễn Xuân Thái và lý thuyết trong các bài báo của Nguyễn Minh Khoa để xây dựng và nghiên cứu tích chập và các ứng dụng của chúng.

5. Bố cục luận văn

Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Các phép biến đổi tích phân Hartley, Fourier sine.

Nhắc lại định nghĩa và các tính chất cơ bản của các phép biến đổi tích phân Hartley, Fourier sine và đưa ra một số ví dụ áp dụng.

Chương 2: Tích chập suy rộng.

Xây dựng và nghiên cứu các tính chất của tích chập và đưa ra ứng dụng giải phương trình, hệ phương trình tích phân dạng chập.

Chương 1

Các phép biến đổi tích phân Hartley, Fourier sine

1.1 Phép biến đổi tích phân Fourier sine

1.1.1 Định nghĩa phép biến đổi tích phân Fourier sine

Định nghĩa 1.1. *Cho $f \in L(\mathbb{R}_+)$, hàm $F_s f$ được xác định bởi*

$$\hat{f}(y) = (F_s f)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\ \sin yx\, dx \qquad (1.1)$$

là phép biến đổi Fourier sine của hàm f.
Ta có công thức nghịch đảo sau

$$f(x) = (F_s \hat{f})(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(y)\ \sin yx\, dy \qquad (1.2)$$

Ví dụ 1.1. Tìm biến đổi Fourier sine của hàm

$$f(x) = e^{-\alpha x}, \alpha > 0$$

Giải:

$$
\begin{aligned}
(F_s f)(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} [e^{-(\alpha - iy)x} - e^{-(\alpha + iy)x}] dx \\
&= \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big(\frac{1}{\alpha - iy} - \frac{1}{\alpha + iy}\Big) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big(\frac{y}{\alpha^2 + y^2}\Big)
\end{aligned}
$$

Ví dụ 1.2. Tìm biến đổi Fourier sine của hàm

$$
f(x) = \begin{cases} m, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}
$$

Giải:

Ta có

$$
\begin{aligned}
(F_s f)(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}.m \int_0^a \sin yx dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \frac{1}{y} [1 - \cos ay]
\end{aligned}
$$

1.1.2 Các tính chất của phép biến đổi Fourier sine

Tính chất 1.1. *(Tính tuyến tính)*
Nếu f, g có biến đổi Fourier sine, thì mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$$
F_s(\alpha f + \beta g) = \alpha(F_s f) + \beta(F_s g).
$$

Chứng minh. Với mọi f, $g \in L(\mathbb{R}_+)$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$$
\begin{aligned}
F_s[\alpha f(x) + \beta g(x)](y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]. \sin yx dx \\
&= \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \ \sin yx \ dx \\
&+ \beta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(x) \ \sin yx \ dx \\
&= \alpha(F_s f)(y) + \beta(F_s g)(y).
\end{aligned}
$$

Vậy F_s là toán tử tuyến tính. $\square$

Tính chất 1.2. *Với $a > 0$ đặt $f_a(x) = f(ax)$, khi đó ta có:*

$$(F_s f_a)(y) = \frac{1}{a}(F_s f)\left(\frac{y}{a}\right)$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
(F_s f_a)(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(ax) dx \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(ax) \sin\left(\frac{y}{a} ax\right) d(ax) \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin\left(\frac{y}{a} t\right) dt \quad (t = ax) \\
&= \frac{1}{a}(F_s f)\left(\frac{y}{a}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Tính chất 1.3. *(Biến đổi Fourier sine của đạo hàm)*

Giả sử $f(x)$ liên tục và khả tích tuyệt đối trên $(0, +\infty)$, $f'(x)$ liên tục từng khúc trên mọi đoạn hữu hạn và $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$. Khi đó

$$F_s(f'(x))(y) = -y(Fcf(x))(y)$$

Chứng minh. Lấy tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}
F_s(f') &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f'(x) \sin yx dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} [f(x). \sin yx \Big|_0^{+\infty} - y \int_0^{+\infty} f(x) \cos yx dx] \\
&= -y F_c f.
\end{aligned}$$

$\square$

Tính chất 1.4. *Giả sử các phép biến đổi Fourier sine, Fourier cosine sau đều tồn tại, khi đó ta có hệ thức:*

$$F_s(f'') = -y^2 F_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} y f(0).$$