ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG NHUNG

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA PHỔ CÁC SỐ MŨ ĐẶC TRƯNG CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG NHUNG

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA PHỔ CÁC SỐ MŨ ĐẶC TRƯNG CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu

Năm 1892, A. M. Lyapunov đã đưa ra và sử dụng khái niệm *số mũ đặc trưng* để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính.

Khái niệm số mũ đặc trưng Lyapunov đã được Hoàng Hữu Đường mở rộng thành khái niệm *vectơ đặc trưng* (số mũ vectơ đặc trưng) để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính trong trường hợp tới hạn (khi số mũ đặc trưng chưa đủ để chứng minh tính ổn định nghiệm) vào những năm 1965 - 1982.

Một trong những câu hỏi quan trọng trong lý thuyết số mũ đặc trưng là *tính ổn định* của phổ các số mũ đặc trưng. Câu hỏi này liên quan đến nhiều vấn đề khác, thí dụ, khi xây dựng thuật toán tính số mũ đặc trưng, thường phải giả thiết các số mũ đặc trưng là phân biệt và ổn định (xem, thí dụ, [8], [10]). Năm 1969, B. F. Bylov và N. A. Izobov (xem [6], [7]) đã đưa ra điều kiện cần và đủ để phổ các số mũ đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính là ổn định dưới sự ảnh hưởng của các nhiễu động tuyến tính đủ nhỏ. Tiêu chuẩn ổn định của phổ các vectơ đặc trưng cũng đã được Hoàng Hữu Đường chứng minh (xem [1]).

Trong luận văn này, chúng tôi trình bày về số mũ Lyapunov, vectơ đặc trưng Hoàng Hữu Đường, và tính ổn định của chúng; trình bày cụ thể, rõ ràng và chứng minh chi tiết hơn trong các tài liệu tham khảo.

Luận văn gồm phần Mở đầu, 2 chương, phần Kết luận và các Tài liệu tham khảo.

Trong chương 1, chúng tôi nhắc lại khái niệm và các tính chất của số mũ đặc trưng cho hàm số, cho ma trận các hàm số và cho nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính; trình bày khái niệm tách được và tách được tích phân, khái niệm ổn định của phổ các số mũ đặc trưng; chứng minh một cách chi tiết và tổng quát định lý về tính ổn định của phổ các số mũ đặc trưng phân biệt của nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính $n-$chiều.

Chương 2 chúng tôi trình bày khái niệm và các tính chất của vectơ đặc trưng cấp m cho hàm số, cho ma trận các hàm số và cho nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính; trình bày khái niệm tách được cấp m, nhị phân yếu m và khái niệm ổn định cấp m của vectơ đặc trưng cấp m; dẫn tới điều kiện cần và đủ cho tính ổn định cấp m của các vectơ đặc trưng cấp m của nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính $n-$chiều khi tất cả các vectơ đặc trưng cấp $m-1$ của hệ đang xét trùng nhau.

Để hoàn thành luận văn này, trước nhất tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới PGS.TS. Tạ Duy Phượng, người đã dành thời gian hướng dẫn, tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu và tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban giám hiệu, Phòng Sau Đại học, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin Trường Đại học Khoa Học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn đặc biệt đến những người thân và những người bạn đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2013.

Người thực hiện

Nguyễn Thị Hồng Nhung

Chương 1

Tính ổn định của số mũ đặc trưng Lyapunov cho hệ phương trình vi phân tuyến tính

Trong chương này, chúng tôi trình bày tổng quan về số mũ đặc trưng và tính ổn định của phổ các số mũ đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính. Sau đó phát biểu điều kiện cần và đủ cho tính ổn định của phổ các số mũ đặc trưng. Các tiêu chuẩn này đã được B. F. Bylov và N. A. Izobov công bố trong các bài báo trên tạp chí Differential Equations vào năm 1969 (xem [6], [7]).

1.1. Số mũ đặc trưng Lyapunov. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

1.1.1. Số mũ đặc trưng của hàm số

Xét hàm số mũ $e^{\alpha t}$, trong đó α là số thực. Nếu $\alpha > 0$ thì $e^{\alpha t} \to +\infty$ khi $t \to +\infty$; nếu $\alpha = 0$ thì $e^{\alpha t} = 1$ là hằng số với mọi $t \geq t_0$; nếu $\alpha < 0$ thì $e^{\alpha t} \to 0$ khi $t \to +\infty$; tức là thừa số α đặc trưng cho cấp tăng của hàm $e^{\alpha t}$. Khi đó số α được gọi là *số mũ đặc trưng* của hàm $e^{\alpha t}$.

Từ nay về sau chúng ta chỉ làm việc với $t \to +\infty$, nên để cho ngắn gọn, ta viết $t \to \infty$ thay cho $t \to +\infty$ và ∞ thay cho $+\infty$.

Tổng quát hơn, ta xét hàm số giá trị thực $f(t)$ xác định trong khoảng $[t_0, \infty)$, ở đây t_0 là một số hoặc ký hiệu $-\infty$. Ta có thể viết $|f(t)| = e^{\alpha(t).t}$, trong đó $\alpha(t) = \dfrac{1}{t}\ln|f(t)|$ đóng vai trò là hàm số của t. Như vậy, để nghiên cứu cấp tăng của hàm $|f(t)|$, cần phải xét các giá trị của hàm $\alpha(t)$. Trên cơ sở này A. M. Lyapunov đã đưa vào khái niệm số mũ đặc trưng của một hàm số.

Định nghĩa 1.1. (Xem [4], tr. 25). Số (hoặc các ký hiệu $-\infty, \infty$) xác định bởi công thức

$$\chi[f] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|f(t)| \tag{1.1}$$

được gọi là *số mũ đặc trưng Lyapunov* (ngắn gọn, *số mũ đặc trưng*) của hàm số $f(t)$.

Số mũ đặc trưng của một hàm số có thể hữu hạn hoặc vô hạn. Sau này, ta chỉ xét các trường hợp hữu hạn, trừ $\chi[0] = -\infty$ (với quy ước $\ln 0 = -\infty$).

Ví dụ 1.1. Áp dụng công thức (1.1) ta có

1) $\chi[c\,t^m] = 0$, (m là hằng số bất kỳ, $c \neq 0$). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\chi[c\,t^m] &= \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|c\,t^m| = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|c| + m\ln|t|}{t}\\ &= \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|c|}{t} + m\,\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|t|}{t} = 0 + m.0 = 0.\end{aligned}$$

2) $\chi[e^{\alpha t}] = \alpha$. Vì

$$\chi[e^{\alpha t}] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|e^{\alpha t}| = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\alpha t}{t}\ln e = \alpha.$$

3) $\chi[t^t] = \infty$. Do

$$\chi[t^t] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|t^t| = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{t\ln|t|}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}}\ln|t| = \infty.$$

4) $\chi[t^{-t}] = -\infty$. Tương tự ví dụ 3) ta có

$$\chi[t^{-t}] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|t^{-t}| = -\overline{\lim_{t\to\infty}}\ln|t| = -\infty.$$

5) $\chi[e^{t^2}] = \infty$. Vì

$$\chi[e^{t^2}] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|e^{t^2}| = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{t^2.\ln e}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} t = \infty.$$

6) $\chi[e^{\pm t\sin t}] = 1$. Thật vậy, ta có

$$\chi[e^{t\sin t}] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|e^{t\sin t}| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t\sin t}{t} \ln e = \overline{\lim_{t\to\infty}} \sin t = 1.$$

Tương tự,

$$\chi[e^{-t\sin t}] = \overline{\lim_{t\to\infty}} (-\sin t) = 1.$$

7) $\chi[e^{\pm t\cos\frac{1}{t}}] = 1$. Tương tự ví dụ 6) ta cũng có

$$\chi[e^{\pm t\cos\frac{1}{t}}] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln\left|e^{\pm t\cos\frac{1}{t}}\right| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\pm\cos\frac{1}{t}\right) = 1.$$

8) $\chi[e^{te^{\sin t}}] = e$. Vì

$$\chi[e^{te^{\sin t}}] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|e^{te^{\sin t}}| = \overline{\lim_{t\to\infty}} e^{\sin t} = e.$$

9) $\chi[e^{-te^{\sin t}}] = -e^{-1}$. Do

$$\chi[e^{-te^{\sin t}}] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|e^{-te^{\sin t}}| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(-e^{\sin t}\right) = -e^{-1}.$$

Bổ đề 1.1. *$\chi[f] = \alpha \neq \pm\infty$ khi và chỉ khi với bất kỳ $\varepsilon > 0$ hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

i)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} = 0; \tag{1.2}$$

ii) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{|f(t)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t}} = \infty$, *tức là tồn tại dãy $t_k \to \infty$ sao cho*

$$\lim_{t_k\to\infty} \frac{|f(t_k)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_k}} = \infty. \tag{1.3}$$

Chứng minh. (Xem [4], tr. 26 - 27).

Ngoài ra, nếu đối với một số α nào đó mà với mọi $\varepsilon > 0$ đẳng thức (1.2) được thỏa mãn thì $\chi[f] \leq \alpha$; còn nếu (1.3) thỏa mãn thì $\chi[f] \geq \alpha$.

Như vậy, nếu hàm $f(t)$ có số mũ đặc trưng $\alpha \neq \pm\infty$ thì hàm $|f(t)|$ sẽ tăng chậm hơn bất kỳ hàm mũ $e^{(\alpha+\varepsilon)t}$ khi $t \to \infty$, và theo một dãy $t_k \to \infty$ nào đó nó sẽ tăng nhanh hơn hàm $e^{(\alpha-\varepsilon)t}$.

Sau đây, chúng ta nhắc lại một số tính chất cơ bản của số mũ đặc trưng của hàm số (xem [4], tr. 26 - 28).

Giả sử $f_1(.), f_2(.), \ldots, f_n(.)$ là các hàm số nhận giá trị thực xác định trên khoảng $[t_0, \infty)$. Khi đó

1) $\chi[f] = \chi[|f|]$.

2) $\chi[cf] = \chi[f]$, với mọi số thực $c \neq 0$.

3) Nếu $|f_1(t)| \leq |f_2(t)|$ với mọi $t \geq T \geq t_0$ thì $\chi[f_1] \leq \chi[f_2]$.

4) $\chi\left[\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(t)\right] \leq \max\limits_{i} \chi[f_i(t)]$, và nếu với $1 \leq k \leq n$ mà $\chi[f_k(t)] > \chi[f_i(t)]$ với mọi $i \neq k, i = 1, \ldots, n$ thì $\chi\left[\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(t)\right] = \chi[f_k(t)]$.

5) $\chi\left[\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(t)\right] \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \chi[f_i(t)]$.

Định nghĩa 1.2. (Xem [4], tr. 29). Số mũ đặc trưng của hàm $f(t)$ được gọi là *đúng* nếu tồn tại một giới hạn hữu hạn

$$\chi[f] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|f(t)|.$$

Nếu một hàm $f(.)$ có số mũ đặc trưng đúng thì

$$\chi[f] + \chi\left[\frac{1}{f}\right] = 0,$$

và

$$\chi[fg] = \chi[f] + \chi[g],$$

với $f(.)$ và $g(.)$ là các hàm số thực xác định trên khoảng $[t_0, \infty)$ (xem [4], tr. 29). Do đó,

$$\chi[e^{\alpha t}.f(t)] = \alpha + \chi[f].$$

Bây giờ ta xét số mũ đặc trưng của một tích phân.

Định nghĩa 1.3. (Xem [4], tr. 30). Tích phân của hàm $f(t)$ xác định bởi

$$F(t) = \int\limits_{a}^{t} f(\tau)d\tau, \quad \text{trong đó} \quad a = \begin{cases} t_0, & \text{với } \chi[f] \geq 0, \\ \infty, & \text{với } \chi[f] < 0, \end{cases}$$

được gọi là *tích phân Lyapunov*.