ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Lưu Thị Minh Thuỷ

CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC ĐẠI SỐ SINH BỞI HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Lưu Thị Minh Thuỷ

CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC ĐẠI SỐ SINH BỞI HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mở đầu **2**

1 Đẳng thức lượng giác **4**
1.1 Một số đồng nhất thức giữa các đa thức lượng giác 4
1.1.1 Định nghĩa và tính chất của đa thức lượng giác . . 4
1.1.2 Một số đồng nhất thức giữa các hàm số lượng giác 5
1.1.3 Tính giá trị của một số biểu thức lượng giác 10
1.2 Hệ thức lượng giác trong tam giác 12
1.2.1 Các hệ thức cơ bản trong tam giác 12
1.2.2 Các hệ thức lượng giác thường gặp trong tam giác 14
1.3 Một số dạng hệ thức lượng giác trong hình học 16

2 Các đồng nhất thức đại số liên quan đến biến đổi lượng giác **24**
2.1 Các đồng nhất thức đại số liên quan đến hàm sin và cosin 24
2.2 Các đồng nhất thức đại số liên quan đến hàm tang và cotang 31
2.3 Một số dạng đồng nhất thức hàm 37
2.3.1 Phép chuyển đổi bảo toàn góc của tam giác 37
2.3.2 Áp dụng 48
2.3.3 Phép chuyển đổi bảo toàn cạnh của tam giác 51
2.3.4 Áp dụng 57

3 Một số lớp phương trình và bất phương trình trong đại số giải bằng các đồng nhất thức **60**
3.1 Giải và biện luận phương trình bậc ba 60
3.2 Giải và biện luận hệ phương trình đại số 71
3.3 Một số dạng bất đẳng thức đại số giải bằng biến đổi lượng giác 78

Kết luận **87**

Tài liệu tham khảo **88**

Mở đầu

Đồng nhất thức là một trong những khái niệm cơ bản của chương trình Toán ở bậc học phổ thông. Đặc biệt, ở các trường THPT chuyên và các lớp chuyên toán có rất nhiều dạng toán liên quan đến đồng nhất thức. Trong các đề thi tuyển sinh đến các đề thi học sinh giỏi các cấp có nhiều bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình ...được giải bằng cách áp dụng các đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác. Hiện nay các tài liệu có tính hệ thống về vấn đề này còn chưa được đề cập nhiều.

Để đáp ứng nhu cầu học tập và giảng dạy môn Toán ở bậc phổ thông, luận văn "Các đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác và áp dụng" nhằm hệ thống và giải quyết các bài toán liên quan đến đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác. Luận văn được chia ra làm ba chương.

Chương 1 - Nêu một số đồng nhất thức giữa các hàm số và đa thức lượng giác, đồng thời trình bày các hệ thức lượng giác trong tam giác và một số dạng hệ thức lượng giác trong hình học.

Chương 2 - Trình bày các đồng nhất thức đại số liên quan đến hàm sin, hàm cosin, hàm tang và hàm cotang. Đặc biệt trong chương này còn trình bày một số đồng nhất thức hàm và áp dụng của đồng nhất thức hàm để sinh ra các bài toán về chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

Chương 3 - Sử dụng các đồng nhất thức đại số nêu ở chương 2 để giải và biện luận phương trình bậc ba, giải và biện luận hệ phương trình đại số. Phần cuối của chương trình bày một số dạng bất đẳng thức đại số được giải bằng biến đổi lượng giác.

Để hoàn thành luận văn này, trước nhất tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã dành thời gian hướng dẫn, chỉ bảo tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình xây dựng đề tài cũng như hoàn thiện luận văn. Tiếp theo, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành các thầy cô đã đọc, kiểm tra, đánh giá và cho những ý kiến quý báu để luận văn được đầy đủ hơn, phong phú hơn. Qua đây, tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu, phòng Sau Đại học, phòng Đào tạo, khoa

Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian, trình độ và điều kiện nghiên cứu còn hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, Tháng 07 năm 2013.

Lưu Thị Minh Thủy

Chương 1

Đẳng thức lượng giác

1.1 Một số đồng nhất thức giữa các đa thức lượng giác

1.1.1 Định nghĩa và tính chất của đa thức lượng giác

Định nghĩa 1.1 (Xem [5]). Hàm số có dạng

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

trong đó a_n và b_n không đồng thời bằng 0 (tức là $a_n^2 + b_n^2 > 0$), $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ với $i = 0, 1, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n$ được gọi là *đa thức lượng giác bậc n* ($n \in \mathbb{N}^*$). Khi tất cả các $b_j = 0$ với $j = 1, 2, \ldots, n$ ta có

Định nghĩa 1.2 (Xem [5]). Hàm số có dạng

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx \qquad (a_n \neq 0),$$

được gọi là *đa thức lượng giác bậc n theo cosin*. Tương tự, khi tất cả các $a_i = 0$ với $i = 0, 1, \ldots, n$ ta có

Định nghĩa 1.3 (Xem [5]). Hàm số có dạng

$$S_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx \quad (b_n \neq 0),$$

được gọi là *đa thức lượng giác bậc n theo sin*.

Sau đây, ta liệt kê một số tính chất đơn giản của đa thức lượng giác.

Tính chất 1.1. Tổng của hai đa thức lượng giác $A_n(x)$ và $B_m(x)$ là một đa thức lượng giác có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $\max\{n, m\}$.

Tính chất 1.2. Tích của hai đa thức lượng giác $A_n(x)$ và $B_m(x)$ là một đa thức lượng giác có bậc bằng $n + m$.

Tính chất 1.3. Nếu đa thức lượng giác

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

đồng nhất bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì tất cả các hệ số của nó đều bằng 0, tức là

$$a_0 = a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \cdots = a_n = b_n = 0.$$

1.1.2 Một số đồng nhất thức giữa các hàm số lượng giác

Bài toán 1.1. Biểu diễn các hàm số $\sin^n x$ và $\cos^n x$ dưới dạng các đa thức lượng giác.

Lời giải. Giả sử $z = \cos t + i \sin t$. Khi đó

$$z^{-1} = (\cos t + i \sin t)^{-1} = \cos t - i \sin t.$$

Do đó

$$\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad \text{và} \quad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}\cdot$$

Ta có

$$(z + z^{-1})^n = z^n + C_n^1 z^{n-1} z^{-1} + C_n^2 z^{n-2} z^{-2} + \cdots + C_n^{n-1} z z^{-n+1} + z^{-n}$$
$$= \begin{cases} (z^n + z^{-n}) + C_n^1(z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + C_n^{\frac{n}{2}} & (\text{nếu } n \text{ chẵn}), \\ (z^n + z^{-n}) + C_n^1(z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}}(z + z^{-1}) & (\text{nếu } n \text{ lẻ}). \end{cases}$$

Và

$$(z - z^{-1})^n = z^n - C_n^1 z^{n-1} z^{-1} + C_n^2 z^{n-2} z^{-2} + \cdots + (-1)^n z^{-n}$$
$$= \begin{cases} (z^n + z^{-n}) - C_n^1(z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, \\ (z^n - z^{-n}) - C_n^1(z^{n-2} - z^{-(n-2)}) + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}}(z - z^{-1}). \end{cases}$$

Vậy

$$\cos^n x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\Big[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + \dfrac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}\Big] & (\text{nếu } n \text{ chẵn}), \\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\Big[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}} \cos x\Big] & (\text{nếu } n \text{ lẻ}). \end{cases}$$

$$\sin^n x = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\Big[2\cos nx - 2C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}\Big], \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}\Big[2\sin nx - 2iC_n^1 \sin(n-2)x + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2\sin x\Big]. \end{cases}$$

Bài toán 1.2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin^{2p} x$ (p là một số tự nhiên) là một đa thức lượng giác theo cosin.

Lời giải. Từ công thức $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ dễ dàng suy ra

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\cdot$$

Do đó

$$\sin^{2p} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2p},$$

suy ra

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k . e^{ikx} . e^{-i(2p-k)x} \\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k . e^{2ikx - 2ipx} + \sum_{k=p+1}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k . e^{2i(k-p)x} \right) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}} \\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k (e^{2i(k-p)x} + e^{-2i(k-p)x}) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}} \\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k . C_{2p}^k . \cos 2(k-p)x + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}\cdot
\end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là một đa thức lượng giác bậc $2p$ theo cosin.

Bài toán 1.3. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d. Tính các tổng sau:

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin a_k$,

b) $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos a_k$.

Lời giải.

a) - Nếu $d = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $S_n = n \sin a_1$.

- Nếu $d \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $\sin \dfrac{d}{2} \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned}
2 \sin a_n \sin \frac{d}{2} &= 2 \sin[a_1 + (n-1)d] \sin \frac{d}{2} \\
&= \cos \left[a_1 + (n - \frac{3}{2})d\right] - \cos \left[a_1 + (n - \frac{1}{2})d\right].
\end{aligned}$$

Xét $g(n) = \cos\Big[a_1 + (n - \dfrac{3}{2})d\Big]$, ta có

$$2\sin a_n.\sin\frac{d}{2} = g(n) - g(n+1).$$

Vậy

$$\begin{cases} 2\sin a_1.\sin\dfrac{d}{2} = g(1) - g(2),\\ 2\sin a_2.\sin\dfrac{d}{2} = g(2) - g(3),\\ \dots\dots\dots\\ 2\sin a_n.\sin\dfrac{d}{2} = g(n) - g(n+1). \end{cases}$$

Cộng các đồng nhất thức theo vế, ta được

$$\begin{aligned} 2S_n\sin\frac{d}{2} &= g(1) - g(n+1)\\ &= \cos\Big(a_1 - \frac{d}{2}\Big) - \cos\Big[a_1 + \Big(n - \frac{1}{2}\Big)d\Big]\\ &= -2\sin\Big(a_1 + \frac{n-1}{2}d\Big)\sin\Big(-\frac{n}{2}d\Big). \end{aligned}$$

Do đó

$$S_n = \frac{\sin\Big(a_1 + \dfrac{n-1}{2}d\Big)\sin\Big(\dfrac{n}{2}d\Big)}{\sin\dfrac{d}{2}}.$$

b) Theo cách giải như trên, ta thu được
- Nếu $d = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $T_n = n\cos a_1$.
- Nếu $d \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì

$$T_n = \frac{\cos\Big(a_1 + \dfrac{n-1}{2}d\Big)\sin\dfrac{n}{2}d}{\sin\dfrac{d}{2}}.$$

Chú ý 1.1. Như vậy, với mỗi một cấp số cộng, ta tìm được một công thức tính tổng tương ứng. Chẳng hạn, với $x \neq l\pi (l \in \mathbb{Z})$ ta có

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x\\ &= \frac{\cos\Big(x + \dfrac{n-1}{2}.2x\Big).\sin\Big(\dfrac{n}{2}.2x\Big)}{\sin\dfrac{2x}{2}} = \frac{\cos nx.\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}. \end{aligned}$$

Nhận xét 1.1. Với những giá trị của x sao cho $\sin 2nx = \sin x$ ($\sin x \neq 0$) thì ta luôn có $T_n = \dfrac{1}{2}\cdot$ Từ đó, ta thu được một số kết quả sau:

Với $n = 2$, chọn $x = \dfrac{\pi}{5}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\cdot$$

Với $n = 3$, chọn $x = \dfrac{\pi}{7}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}\cdot$$

Với $n = 4$, chọn $x = \dfrac{\pi}{9}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}\cdot$$

Bài toán 1.4. Tính các tổng sau:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\sin kx, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx \quad \text{với } x \neq 2l\pi\ (l \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải. Trước hết, ta nhắc lại rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\sin\dfrac{x}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot$$

Ta có:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k.\sin kx = \sum_{k=1}^{n}[-(\cos kx)'] = -\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)',$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k.\cos kx = \sum_{k=1}^{n}[(\sin kx)'] = \left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)'.$$

Từ đó suy ra các công thức cần tìm.