ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN & TRUYỀN THÔNG

LÝ THỊ THU HÀ

PHÉP NỘI SUY FRACTAL

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC MÁY TÍNH

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN & TRUYỀN THÔNG

LÝ THỊ THU HÀ

PHÉP NỘI SUY FRACTAL

Chuyên ngành: Khoa học máy tính

Mã số: 60 48 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC MÁY TÍNH

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS. NGUYỄN HỮU ĐIỂN

Thái Nguyên – 2013

MỞ ĐẦU

1. Đặt vấn đề

Chúng ta đều biết rằng hình học Euclide cho phép vẽ và đo đạc các hình có dạng là các đường thẳng và các đường cônic. Tuy nhiên trong thực tế không phải lúc nào chúng ta cũng chỉ đo đạc với các đường này. Một minh chứng là, để đo đoạn bờ biển từ một địa điểm A đến địa điểm B nào đó, ta có thể sử dụng compa với độ mở 1 mét và tiến hành đo sát mép nước. Đây là cách làm mà chúng ta thường hay nghĩ tới. Tuy nhiên khi đo như vậy, ta đã bỏ qua các lồi lõm nhỏ hơn 1 mét. Thu hẹp độ mở của compa còn 100cm ta tính thêm được một số chỗ lồi lõm, và thu được giá trị lớn hơn và chính xác hơn chút nữa. Cứ tiếp tục làm như vậy ta tiến dần tới giới hạn thực của địa điểm A và địa điểm B. Việc làm trên đây thực chất là ta thay đổi một đường cong thực quá gồ ghề khúc khủy bằng các phép đo liên tiếp theo độ mở giảm dần của compa. Vì chiều dài bờ biển không thể vô tận nên các phép đo này phải hội tụ. Đối với hình học Euclide thì là đúng. Chẳng hạn đối với một đường tròn, phương pháp tổng các dây cung ngày một ngắn và hội tụ đến chu vi hình tròn. Nhưng đó là các hình Euclide mà ta quen thuộc từ hàng ngàn năm nay như tam giác, tứ giác....

Ta thấy được rằng, khi thu nhỏ độ mở của compa ta luôn luôn phát hiện những "eo biển" nhỏ hơn, do vậy giá trị độ dài thực của bờ biển tăng lên mãi đến vô cùng. Nói một cách sâu xa hơn, phép đo Euclide thông thường không phản ánh được các hình dáng gồ ghề, phức tạp của các hình thể tồn tại trong thực tế. Những đường gồ ghề ấy được gọi là các hình Fractal.

Ra đời muộn trong các phân môn của hình học, Fractal - hình học phân dạng là cái tên xuất hiện lần đầu vào năm 1975 bởi nhà toán học Benoit Mandelbrot mang hai quốc tịch Pháp - Mỹ. Thuật ngữ Fractal và những ảnh hình dựa trên "sự tự đồng dạng" đã gây ấn tượng rõ rệt đối với nhiều người, trong đó có cả những người không hề có một chút kiến thức khoa học nào. Nó làm cho họ bị sốc nhưng thú vị. Còn đối với riêng Mandelbrot, nó làm cho ông thích thú, vì toán học vốn là một khoa học nổi tiếng khô khan và kỳ quái đã trở thành một cái gì đó rất thiết thực và gần gũi.

Hiện nay, vẫn còn rất nhiều vấn đề về lý thuyết Fractal vẫn đang được tiếp tục nghiên cứu. Một trong các vấn đề được quan tâm đó là hàm nội suy Fractal. Trước đây, các bài toán nội suy đã được đề cập. Vậy bài toán về nội suy Fractal có gì khác biệt với những bài toán nội suy trước đó? Đây cũng chính là lý do em chọn làm đề tài nghiên cứu khoa học của mình: "***Phép nội suy Fractal***" với mục tiêu nắm bắt những kiến thức cơ bản về Hình học Fractal, hàm Ftactal và tìm hiểu về nội suy Fractal có gì khác biệt với các bài toán nội suy trước đó.

2. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đối tượng nghiên cứu: phép nội suy fractal.
- Phạm vi nghiên cứu: tìm hiểu tổng quan về hình học fractal, các khái niệm cấu trúc về Fractal, các phép nội suy thông thường và đi sâu nghiên cứu về hàm nội suy Fractal.

3. Hướng nghiên cứu của đề tài

- Tìm hiểu tổng quan về Fractal
- Tìm hiểu các phép nội suy thông thường
- Tìm hiểu về phép nội suy Fractal
- Lập trình tính các giá trị nội suy theo phương pháp nội suy Fractal

4. Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu các tài liệu và viết tổng quan, phương pháp phân tích và thiết kế đối tượng và phương pháp thử nghiệm

5. Ý nghĩa khoa học của đề tài

- Bản thân hiểu sâu về hình học Fractal.
- Xây dựng được chương trình nội suy Fractal từ đó rút ra sự khác biệt với các bài toán nội suy thông thường.

CHƯƠNG I: TỔNG QUAN VỀ FRACTAL

1.1. Các khái niệm cơ bản về không gian của Fractal

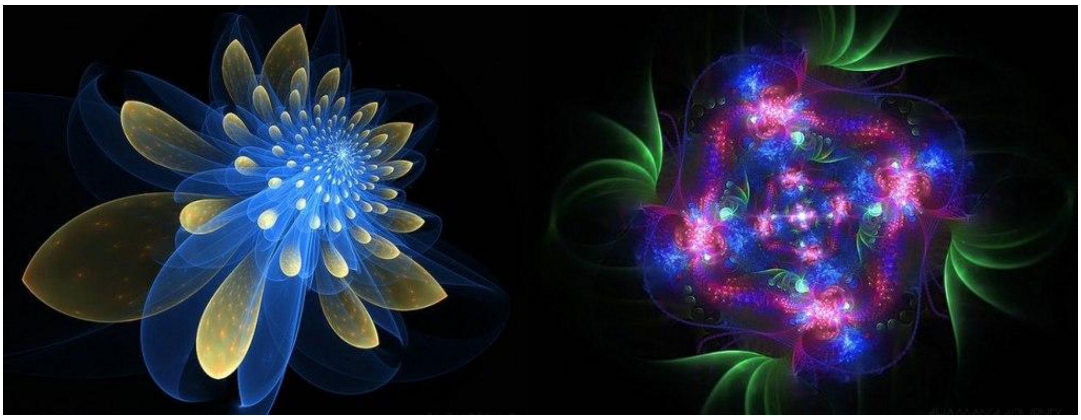
Tại sao hình học thường bị ví như "lạnh" và "khô" ? Một lí do nằm trong sự thiếu khả năng của nó trong mô tả hình đám mây, núi, bờ biển hay cây cối. Mây không phải là hình cầu, núi không phải là hình nón, bờ biển không phải là đường tròn, và vỏ cây thì không phải là trơn phẳng, tia sét cũng không đi theo một đường thẳng.

Sự ra đời của lý thuyết hình học Fractal là kết quả của nhiều thập kỷ nỗ lực giải quyết các vấn đề nan giải trong nhiều ngành khoa học chính xác, đặc biệt là vật lý và toán học. Một cách cụ thể, lý thuyết hình học Fractal được xây dựng dựa trên 2 vấn đề lớn được quan tâm ở những thập niên đầu thế kỷ 20. Các vấn đề đó bao gồm:

+ Tính hỗn độn của các quá trình phát triển có quy luật trong tự nhiên.

+ Sự mở rộng khái niệm số chiều và độ đo trong lý thuyết hình học Euclide cổ điển.

Năm 1979, nhà toán học Benoit Mandelbrot áp dụng tập Mandelbrot đầy kì ảo lên máy tính. Ông đã khám phá ra một lãnh vực hình học mới đầy thú vị cho phép phản ánh thế giới thực một cách tự nhiên hơn so với hình học Euclide. Tất cả những hình ảnh mà ta thường gặp trong tự nhiên như : núi, mây, sông, nước… nay máy tính đã có khả năng mô tả được bằng phương pháp Fractal. Để thấy rõ hơn sức mạnh của Fractal trong mô tả tự nhiên bạn có thể xem thêm bộ sưu tập ảnh Fractal kèm theo.



Hình 1.1. Ảnh Fractal

.

Trong giai đoạn này B. Mandelbrot và các nhà toán hoc khác như A.Douady và J.Hubbard đã đặt nền móng và phát triển lí thuyết cho hình học Fractal. Các kết quả đạt được chủ yếu tập trung ở các tính chất của các cấu trúc Fractal cơ sở như tập Maldenbrot và tập Julia. Ngoài ra các ngiên cứu khác cũng cố gắng tìm kiếm mối quan hệ giữa các cấu trúc này, ví dụ như mối quan hệ giữa Maldenbrot và Julia. Dựa trên các công trình của Maldenbrot (trong những năm 1976, 1979, 1982) và Hutchinson(1981), vào các năm 1986,1988 Michael F.Barnsley và M.Begger đã phát triển lý thuyết biểu diễn các đối tượng tự nhiên dựa trên cơ sở lý thuyết về các hệ hàm lặp IFS.

Các hệ hàm lặp này bao gồm một bộ hữu hạn các phép biến đổi affine cho phép với sự giúp đỡ của máy tính tạo nên hình ảnh của các đối tượng trong tự nhiên. Theo lý thuyết này hình học Euclide cổ điển rất có hiệu lực trong việc biểu diễn các đối tượng nhân tạo như một tòa nhà, một cổ máy nhưng lại hoàn toàn không thích hợp cho việc biểu diễn các đối tượng của thế giới thực vì đòi hỏi một lượng quá lớn các đặc tả cần có. Nếu như trong hình học Euclide các yếu tố cơ sở là đường thẳng, đường tròn, hình vuông,… thì lý thuyết IFS mở rộng hình học cổ điển với các yếu tố cơ sở mới là vô số thuật toán để vẽ nên các Fractal của tự nhiên.

Chúng ta nghiên cứu phương pháp Fractal được tạo ra bởi ứng dụng của biến đổi đơn giản trong các không gian đơn giản. Chúng ta giải thích hệ hàm lặp (IFS) là gì? và nó có thể định nghĩa Fractal như thế nào? Hệ hàm lặp cung cấp một khung tiện ích cho việc mô tả, phân loại, và liên kết của Fractal. Hai thuật toán, thuật toán lặp ngẫu nhiên và thuật toán xác định, cho việc tính toán ảnh Fractal được trình bày. Đáng chú ý là vấn đề nghịch đảo: đưa đến một tập compact của R^2 và làm cách nào để tìm được xấp xỉ Fractal cho nó? Một phần của câu trả lời được cung cấp bởi Định lý Collage.

1.1.1. Các không gian cơ bản và tính chất của chúng

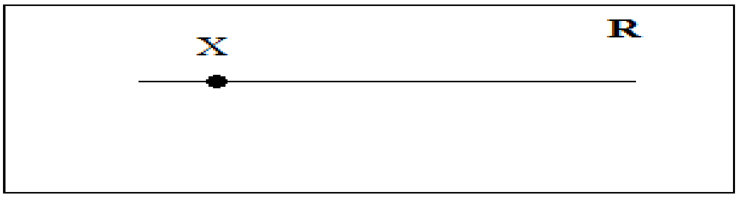
Trong hình học Fractal chúng ta quan tâm đến cấu trúc của các tập con của các không gian "hình học" đơn giản khác nhau. Như một không gian được ký hiệu là X. Nó là không gian mà trên đó chúng ta sẽ vẽ các Fractal; Hình học Fractal được xây dựng trên cơ sở lý thuyết giải tích hàm, sử dụng các kiến thức về không gian Metric, không gian Hausdorff (còn được gọi là không gian Fractal). Từ nay, với chúng ta, nó chỉ là một tập con của một không gian. Bởi vì không gian đơn giản, tập con Fractal có thể là hình học phức tạp.

a. Không gian metric

Định nghĩa 1.1.1. Một không gian X là một tập hợp.Các điểm của không gian là các phần tử của tập hợp.

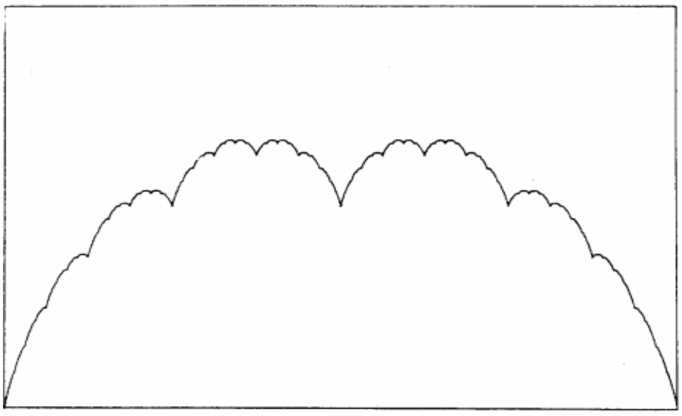
Ví dụ.

+ X = R. Mỗi điểm $x \in X$ là một số thực, hoặc một dấu chấm trên một dòng.



Hình 1.2. Một điểm X $\in$ R

+ X = C[0,1], tập hợp các hàm liên tục những hàm trong khoảng $[0,1]= \{x \in R : 0 \le x \le 1\}$ trong R. Một hàm $f \in X$ là một hàm f: $[0,1] \to R$. f có thể biểu thị bởi đồ thị của nó.



Hình 1.3. Một điểm f trong không gian các hàm liên trục trên đoạn [0, 1].

Định nghĩa 1.1.2. Một *không gian metric (X, d)* là một không gian X cùng với hàm giá trị thực d: X x X $\to$ R, *d* là hàm lấy khoảng cách giữa cặp điểm x và y trong X. Chúng ta yêu cầu *d* tuân theo những điều kiện sau:

a. $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$
b. $0 < d(x, y) < \infty \ \forall x, y \in X, x \neq y$

c. $d(x, x) = 0 \ \forall x \in X$

d. $d(x, y) < d(x, z) + d(z,y) \ \forall x, y, z \in X$

Hàm *d* được gọi là một metric.

Ví dụ 1.: Trong không gian $X = R^2$, một điểm $x \in R^2$ là:

+ $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ (Metric Euclid)

+ $d(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

Ví dụ 2. Không gian mã X định nghĩa:

$$d(x, y)=d(x_1x_2x_3\ldots y_1y_2y_3\ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}$$

($\sum$, d) là một không gian metric.

Một không gian metric là một tập hợp của các điểm song song với một hàm mang theo hai yếu tố của tập hợp và đưa ra khoảng cách giữa chúng. Tập hợp có thể là một tập hợp của các điểm hay là một tập hợp của ảnh. Một trong những không gian metric của chúng ta sẽ là tập hợp $\mathcal{H}$ của tất cả các tập hợp con (đóng và bị chặn) của không gian. Tập hợp này có thể tưởng tượng là tập hợp của tất cả các bức tranh đen trắng, trong đó một tập hợp con của không gian được biểu diễn bởi một bức tranh đen tại các điểm của tập hợp con và ở một nơi nào khác màu trắng. Không gian $\mathcal{H}$ rất lớn, bao hàm, ví dụ, bức vẽ một đường kẻ của bạn, đề địa chỉ United Nations (cũng như nhiều bức tranh khác).

Định nghĩa 1.1.3. *Hai metric d_1 và d_2 của không gian X là tương đương* nếu tồn tại hằng số $0< c_1 < c_2 < \infty$ thỏa mãn:

$$c_1d_1(x, y) < d_2(x, y) < c_2d_1(x, y), \ \forall (x,y)\in X \times X.$$

Định nghĩa 1.1.4. *Hai không gian (X_1, d_1) và (X_2, d_2) là tương đương* nếu có một hàm h: $X_1 \rightarrow X_2$ là ánh xạ 1-1 và ánh xạ lên (nó có nghịch đảo), metric $\widetilde{d}_1$ trên X_1 định nghĩa bởi: $\widetilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)), \ \forall x, y \in X$ là tương đương với d_1.

Ví dụ.

+ $X_1 = [1, 2]$, $X_2 = [0, 1]$ với d_1: Euclide trong X_1, $d_2(x, y) = 2.|x - y|$ trong X_2. Ta có (X_1, d_1) và (X_2, d_2) là hai không gian metric tương đương.

+ $X = (0, 1] = \{x\in R: 0< x \leq 1\}$ và $d_1(x, y) = |x - y|$ và $d_2(x, y)= |1/x - 1/y|$. Ta có (X, d_1) và (X, d_2) là hai không gian metric không tương đương.

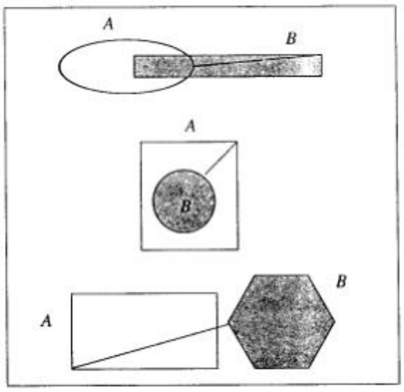
Định nghĩa 1.1.5. Một hàm f: $X_1 \rightarrow X_2$ từ không gian metric (X_1, d_1) tới không gian metric (X_2, d_2) là *liên tục* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ và $x \in X_1$, có một $\delta > 0$ thỏa mãn:

$$d1(x, y) < \delta \Rightarrow d2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Nếu f là một ánh xạ 1-1 và ánh xạ lên, và do đó có nghịch đảo, và nếu nghịch đảo f^{-1} của f là liên tục, thì chúng ta nói f là một phép biến đổi topo giữa X_1 và X_2. Trong trường hợp đó, chúng ta nói rằng X_1 và X_2 là homeomorphic.

*** Metric Haudoff**

Mục tiêu đầu tiên của chúng ta là định nghĩa metric Hausdorff trên không gian này. Metric này sẽ cho chúng ta "khoảng cách" giữa 2 bức tranh bất kì. Metric Hausdorff chính thức được định nghĩa bên dưới. Để tìm thấy khoảng cách Hausdorff h(A,B) giữa hai tập hợp con của không gian, A và B, chúng ta thực hiện thủ tục sau. Với mỗi điểm x ∈ A, tìm điểm kết thúc y nằm trong B. Đo các khoảng cách tối thiểu này (bắt đầu từ A và kết thúc từ B) và chọn cái lớn nhất. Đây là khoảng cách Hausdorff. Hình 1.4 biểu diễn ba ví dụ của các tập hợp A và B và khoảng cách Hausdorff (dựa trên khoảng cách Euclidean) giữa chúng, đánh dấu bằng một dòng. Metric Hausdorff không nhạy để thỏa mãn, nó không thể lựa chọn khoảng cách giữa hai bức tranh của người là nhỏ hơn khoảng cách giữa một bức tranh người và một bức tranh cây dương xỉ.



Hình 1.4: Các tập hợp A và B và khoảng cách Hausdorff giữa chúng, biểu thị bằng một đường kẻ.

Trong các ví dụ trên, khoảng cách tối thiểu lớn nhất được đo từ B đến A; trong hai cái khác, nó được đo từ A đến B.

b. Chuỗi Cauchy, điểm giới hạn, tập đóng, tập hoàn hảo và không gian metric đầy đủ.