ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ THANH HUYỀN

BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPÈRE ELLIPTIC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGÔ THANH HUYỀN

BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPÈRE ELLIPTIC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS.HÀ TIẾN NGOẠN

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mở đầu

Luận văn nghiên cứu tính giải được của bài toán biên Dirichlet cho phương trình Monge-Ampèra elliptic trong miền Ω bị chặn và lồi chặt của $\mathbb{R}^n$. Đây là một phương trình đạo hàm riêng cấp hai phi tuyến hoàn toàn, do đó việc nghiên cứu nó là phức tạp hơn so với các phương trình elliptic tuyến tính hoặc á tuyến tính.

Để tiếp cận bài toán trên, người ta dùng phương pháp liên tục, trong đó đưa vào bài toán tham số $t \in [0, 1]$ sao cho khi $t = 0$ thì bài toán luôn có nghiệm và trường hợp khi $t = 1$ được tương ứng với bài toán của chúng ta. Phương pháp này đòi hỏi phải tiến hành đánh giá tiên nghiệm trong $C^{2,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$ đối với nghiệm của bài toán. Do đó, toàn bộ phần còn lại của Luận văn là dành cho việc trình bày đánh giá này.

Luận văn gồm hai chương. Trong chương I mô tả phương trình Monge-Ampere elliptic, phát biểu bài toán Dirichlet cho phương trình này và tiến hành đánh giá tiên nghiệm theo chuẩn $C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ đối với nghiệm bài toán trong bốn bước.

Phần đầu của chương II trình bày các đánh giá tiên nghiệm đối với phương trình elliptic tuyến tính cấp hai. Sau đó áp dụng các kết quả này để đánh giá theo chuẩn C^α đối với các đạo hàm cấp hai ở bên trong miền Ω và ở trên biên $\partial\Omega$. Các kết quả này cùng với các đánh giá nhận được trong chương I sẽ kết thúc việc đánh giá theo chuẩn $C^{2,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$ đối với nghiệm. Từ đó, dựa vào phương pháp liên tục, suy ra sự tồn tại nghiệm của bài toán Dirichlet đối với phương trình Monge-Ampère elliptic.

Chương 1

Phương trình Monge-Ampère elliptic

1.1 Khái niệm phương trình Monge-Ampère elliptic

Trong chương này, chúng ta trình bày phương pháp liên tục để nghiên cứu về tính giải được của bài toán Dirichlet cho phương trình Monge-Ampère. Phương pháp này đòi hỏi phải đánh giá được nghiệm của bài toán này trong không gian $C^{2,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$. Trong Mục 1.3 chúng ta sẽ đưa ra các đánh giá cho nghiệm và đạo hàm đến cấp hai của nó theo chuẩn trong không gian $C\left(\overline{\Omega}\right)$.

1.1.1 Định nghĩa phương trình Monge-Ampère elliptic

Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên $\partial\Omega$ trơn. Phương trình Monge-Ampère có dạng

$$\det\left(u_{\text{ij}}\right) = f\left(x\right), x \in \Omega, \tag{1.1}$$

trong đó $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $f(x)$ là hàm số cho trước Ω, $u = u\left(x\right)$ là ẩn hàm, $u_{\text{ij}}\left(x\right) = u_{x_i x_j}\left(x\right)$ là đạo hàm cấp hai của ẩn hàm.

Phương trình (1.1) được gọi là phương trình Monge-Ampère elliptic nếu $f\left(x\right) > 0$, ẩn hàm $u(x)$ là hàm lồi và ma trận $\left[u_{\text{ij}}\left(x\right)\right]$ là xác định dương tại mọi điểm $x \in \Omega$.

1.1.2 Một số tính chất của phương trình Monge-Ampère elliptic

Toán tử Monge-Ampère M được xác định bởi

$$M(u) = \det(u_{\mathrm{ij}}),$$

đối với $u \in C^2(\Omega)$. Rõ ràng, $M(u) \geq 0$ nếu $u(x)$ là lồi, và $M(u) > 0$ nếu u là lồi ngặt.
Đối với hàm u lồi ngặt, ta sẽ đưa vào toán tử

$$F\left(D^2u\right) \equiv \log\det(u_{\mathrm{ij}}).$$

Định lý 1.1. *Ta có các công thức sau*

$$F_{\mathrm{ij}} \equiv \frac{\partial F}{\partial u_{\mathrm{ij}}} = u^{\mathrm{ij}},$$

$$F_{\mathrm{ij},kl} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\mathrm{ij}}\partial u_{kl}} = -u^{ik}u^{jl},$$

trong đó $\left(u^{\mathrm{ij}}\right)$ *là ma trận nghịch đảo của ma trận Hessian* (u_{ij}) *.*

Chứng minh. Chúng ta kí hiệu $A = \left[A^{\mathrm{ij}}\right]$ là ma trận các phần bù đại số của ma trận $H = [u_{\mathrm{ij}}]$, tức là $A = (\det H)\,H^{-1}$. Với $i = 1, \ldots\ldots n$, chúng ta khai triển định thức theo hàng thứ i

$$\det D^2u = A^{il}.u_{il} + \ldots\ldots\ldots + A^{in}u_{in}.$$

Sau đó dễ dàng thấy

$$\frac{\partial F}{\partial u_{\mathrm{ij}}} = \frac{1}{\det D^2u}.A^{\mathrm{ij}} = u^{\mathrm{ij}}.$$

Tiếp theo, cố định $i, j = 1, ..., n$, chúng ta có theo định nghĩa

$$u^{ik}.u_{jk} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, \text{ nếu } i = j \\ 0, \text{ nếu } i \neq j \end{cases}.$$

Lấy đạo hàm đẳng thức trên đối với u_{pq}, chúng ta có

$$\left(u^{ik}\right)_{u_{pq}}.u_{jk} + u^{ik}(u_{jk})_{u_{pq}} = 0.$$

Nhân hai vế với u^{jl} và lấy tổng theo j, chúng ta có

$$\left(u^{il}\right)_{u_{pq}} = \left(u^{ik}\right)_{u_{pq}}.u_{jk}.u^{jl} = -u^{ik}.u^{jl}.(u_{jk})_{u_{pq}} = -u^{iq}u^{pl},$$

hoặc

$$\frac{\partial u^{\text{ij}}}{\partial u_{kl}} = -u^{il}.u^{kj}.$$

Vì thế chúng ta có được

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{\text{ij}} \partial u_{kl}} = \frac{\partial u^{\text{ij}}}{\partial u_{kl}} = -u^{il}.u^{kj}.$$

$\square$

Ở trên và dưới đây, nếu trong biểu thức có các chỉ số lặp thì ta quy định là lấy tổng theo chỉ số lặp đó.

Định lý 1.2. *Hàm F là hàm lõm của các đối số của nó, đó là các ma trận xác định dương $D^2 u = (u_{\text{ij}})$. Điều này có nghĩa là*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{\text{ij}} \partial u_{kl}} m_{\text{ij}} m_{kl} \leq 0,$$

đối với mọi ma trận xác định dương $M = (m_{\text{ij}})$.

Chứng minh. Chúng ta chéo hóa ma trận (u_{ij}). Sau đó $\left(u^{\text{ij}}\right)$ trở thành ma trận đường chéo $diag\left(\lambda^1, ..., \lambda^n\right)$ với $\lambda^i > 0$, $i = 1, ..., n$. Do đó, chúng ta có

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_{\text{ij}} \partial u_{kl}}.m_{\text{ij}}.m_{kl} = -u^{il}.u^{kj}.m_{\text{ij}}.m_{kl} = -\lambda^i.\lambda^j.m_{\text{ij}}^2 \leq 0.$$

$\square$

Trước khi nghiên cứu về phương trình Monge-Ampère, chúng ta nêu ra một kết quả đơn giản đối với ma trận dương, mà sẽ cần thiết sau này. Nếu $H = (u_{\text{ij}})$ là ma trận dương, khi đó ta có

$$|u_{\text{ij}}| \leq \frac{1}{2}(u_{ii} + u_{jj}).$$

Điều này có thể dễ dàng nhìn thấy như sau: khi H dương, bất kỳ ma trận đường chéo chính 2×2 nào đều xác định dương. Điều này suy ra

$$u_{\text{ij}}^2 \leq u_{\text{ii}}.u_{jj}.$$

Bất đẳng thức Cauchy sẽ cho ta kết quả bên trên.

Bây giờ chúng ta quay trở lại phương trình Monge-Ampège

$$\det(u_{\text{ij}}) = f.$$

Chúng ta viết lại nó như sau

$$F\left(D^2u\right) = \log\det\left(u_{\mathrm{ij}}\right) = \log f,$$

cho u lồi ngặt
Giả sử ∂ là một đạo hàm theo hướng tùy ý trong $\mathbb{R}^n$. Áp toán tử ∂ vào hai vế của phương trình trên, chúng ta có được

$$u^{\mathrm{ij}}\partial u_{\mathrm{ij}} = \partial \log f.$$

Điều này dẫn đến toán tử vi phân

$$L \equiv u^{\mathrm{ij}}\partial_{\mathrm{ij}},$$

trong đó $\partial_{\mathrm{ij}}u = \partial u_{\mathrm{ij}}$. Khi u là lồi ngặt, L là elliptic. Chúng ta nhận được

$$L\left(\partial u\right) = \partial \log f.$$

Lấy đạo hàm một lần nữa. Chúng ta có

$$L\left(\partial^2 u\right) - u^{il}u^{kj}\partial u_{\mathrm{ij}}\partial u_{kl} = \partial^2 \log f,$$

hoặc

$$L\left(\partial^2 u\right) = u^{il}u^{kj}\partial u_{\mathrm{ij}}\partial u_{kl} + \partial^2 \log f.$$

Số hạng đầu tiên bên phải là dương, khi u là lồi ngặt. Khi đó chúng ta có

$$L\left(\partial^2 u\right) \geq \partial^2 \log f.$$

1.2 Phương pháp liên tục đối với bài toán Dirichlet

1.2.1 Đặt bài toán Dirichlet.

Chúng ta xét bài toán Dirichlet sau

$$\begin{aligned} &\det u_{ij} = f(x) \ \text{ trong } \ \Omega, \\ &u = \varphi \ \text{ trên } \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

ở đây $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $f > 0$, trong $\overline{\Omega}$ và $\varphi \in C^\infty\left(\partial\Omega\right)$ là các hàm số được cho trước.

1.2.2 Không gian Hölder $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

$C^0\left(\bar{\Omega}\right)$ là không gian các hàm liên tục trên $\bar{\Omega}$ với chuẩn

$$\|u\|_{C^0\left(\bar{\Omega}\right)} = \max_{\bar{\Omega}} |u(x)|.$$

Người ta thường viết $C^0\left(\bar{\Omega}\right) = C\left(\bar{\Omega}\right)$.
Định nghĩa

$$C^k\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{u(x) \in C\left(\bar{\Omega}\right); D^\beta u \in C\left(\bar{\Omega}\right), \forall |\beta| \le k\right\},$$

với chuẩn $\|u\|_{C^k\left(\bar{\Omega}\right)} = \sum\limits_{|\beta| \le k} \left\|D^\beta u\right\|_{C\left(\bar{\Omega}\right)}$.

Ở đây ta dùng các kí hiệu sau

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\},\ \beta_j \in \mathbb{N},$$

$$|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n,$$

$$D = (D_1, D_2, ..., D_n),\ D_j = \tfrac{\partial}{\partial x_j},$$

$$D^\beta = D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} ... D_n^{\beta_n}.$$

Cho $0 \le \alpha \le 1$, định nghĩa

$$[u]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \ne y}} \tfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Khi đó

$$C^\alpha\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{u \in C\left(\bar{\Omega}\right); [u]_{\alpha,\Omega} < +\infty\right\},$$

với chuẩn

$$\|u\|_{C^\alpha\left(\bar{\Omega}\right)} = \|u\|_{C^0\left(\bar{\Omega}\right)} + [u]_{\alpha,\Omega}.$$

Với k là một số tự nhiên, ta định nghĩa

$$C^{k,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{u \in C^k\left(\bar{\Omega}\right); [D^\alpha u]_{\alpha,\Omega} < +\infty, \forall |\alpha| = k\right\},$$

với chuẩn

$$\|u\|_{k+\alpha,\Omega} = \|u\|_{C^{k,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)} = \|u\|_{C^k\left(\bar{\Omega}\right)} + \textstyle\sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{\alpha,\Omega},$$

các không gian $C^k\left(\bar{\Omega}\right)$ và $C^{k,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$ là không gian Banach.