ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN ĐỨC ANH

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN BIÊN GIẢI CÁC BÀI TOÁN BIÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐIỀU HÒA VÀ SONG ĐIỀU HÒA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN ĐỨC ANH

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN BIÊN GIẢI CÁC BÀI TOÁN BIÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐIỀU HÒA VÀ SONG ĐIỀU HÒA

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Giáo viên hướng dẫn:
TS NGUYỄN VĂN NGỌC

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu

Trên thực tế, nhiều bài toán trong khoa học kỹ thuật thông qua mô hình toán học được đưa đến việc giải các bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng. Trong đó rất ít bài toán là các trường hợp đơn giản có thể tìm thấy nghiệm tường minh bằng các phương pháp giải tích. Còn đại đa số các trường hợp khác thì nghiệm tường minh hoặc không có hoặc rất phức tạp. Phương trình đạo hàm riêng cấp cao mà tiêu biểu là phương trình điều hòa và song điều hòa là lớp phương trình vẫn còn đang thu hút sự quan tâm rất lớn của các nhà khoa học, kỹ sư và các nhà toán học. Việc nghiên cứu phương pháp tích phân biên giải các bài toán điều hòa và song điều hòa là một lĩnh vực cần được nghiên cứu .

Nội dung chính của luận văn trình bày các kết quả về lý thuyết đối với phương pháp phương trình tích phân biên giải phương trình điều hòa và song điều hòa. Luận văn bao gồm ba chương mang lại một cách nhìn khái quát về phương trình điều hòa và phương trình song điều hòa.

Trong chương một, chúng tôi dành cho việc trình bày một số kiến thức bổ trợ về các không gian hàm khả vi và khả tổng, không gian Sobolev cấp nguyên dương $H^k(Q)$, $H_0^k(Q)$, không gian Sobolev cấp thực $H^s(\mathbb{R}^n)$, $H^s(\Omega)$, các không gian Sobolev đối ngẫu và các định lý nhúng. Đây là nền tảng cho các kết quả sẽ trình bày trong các chương tiếp theo của luận văn.

Chương hai chúng tôi giới thiệu về phương pháp phương trình tích phân biên đối với phương trình điều hòa trong mặt phẳng, công thức biểu diễn hàm điều hòa trên mặt phẳng, các công thức Green và các hàm cơ bản. Đồng thời cũng trình bày phương pháp phương trình tích phân biên dối với các bài toán Dirichlet, bài toán Newmann và bài toán hỗn hợp.

Chương ba của luận văn chúng tôi giới thiệu về phương trình song điều hòa và hệ phương trình tích phân biên để giải nghiệm bài toán.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học -

Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán ứng dụng, Ban Giám hiệu, Phòng Đào nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới TS. Nguyễn Văn Ngọc, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 04 tháng 05 năm 2013.

Người thực hiện

Trần Đức Anh

Chương 1

KIẾN THỨC BỔ TRỢ

Chuong này trình bày một số khái niệm bổ trợ cần thiết về các hàm khả tổng, khả vi, hàm suy rộng và không gian Sobolev. Nội dung của chương này chủ yếu được hình thành từ các tài liệu [7], [8].

1.1 Các không gian hàm khả vi và khả tổng

1.1.1 Hàm liên tục và hàm khả vi

• Giả sử Ω là một miền mở trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Ký hiệu $C(\Omega)$ là lớp các hàm liên tục trong Ω. Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, ta kí hiệu $\overline{\Omega}$ là bao đóng của Ω, tức là $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Khi đó $C(\overline{\Omega})$ là không gian định chuẩn với chuẩn:

$$\|f\|_C = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|. \tag{1.1}$$

• Giá của hàm $f(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ được kí hiệu là supp$f$ là bao đóng của tập hợp tất cả các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ mà tại đó $f(x) \neq 0$. Vậy

$$\mathrm{supp} f := \{\overline{\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0}\}$$

là một tập đóng trong $\mathbb{R}^n$. Nếu $suppf$ là tập bị chặn trong Ω thì ta nói f là hàm có giá compact trong Ω.
• Ký hiệu $C^m(\Omega)$ là tập hợp của tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trong Ω cùng với các đạo hàm $D^\alpha f(x),\ |\alpha| \leq m$. Như vậy, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Tập hợp của các hàm trong $C^m(\Omega)$ có các đạo hàm $D^\alpha f(x),\ |\alpha| \leq m$ được thác triển

liên tục vào $\overline{\Omega}$ được ký hiệu là $C^m(\overline{\Omega})$. Chuẩn trong $C^m(\overline{\Omega})$ được xác định theo công thức

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sup_{\overline{\Omega}} \sum_{|\alpha|=0}^{m} |D^\alpha f(x)|.$$

• Ký hiệu $C^\infty(\Omega)$ là tập hợp của các hàm khả vi vô hạn trong Ω. Tập hợp của các hàm khả vi vô hạn và có giá compact trong Ω được ký hiệu là $C_o^\infty(\Omega)$. Tập hợp các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong $\mathbb{R}^n$ ký hiệu là C_o^∞. Tập hợp các hàm tiêu hạn trong Ω của lớp $C^m(\Omega)$ ký hiệu là $C_o^m(\Omega)$. Tập hợp của các hàm từ $C^m(\overline{\Omega})$ bằng không trên biên $\partial\Omega$ cùng với tất cả các đạo hàm cho đến cấp m được ký hiệu là $C_o^m(\overline{\Omega})$. Cuối cùng, ký hiệu $\overline{C}_o^m$ là lớp các hàm thuộc $C^m(\mathbb{R}^n)$ bằng không tại vô cùng với tất cả các đạo hàm cho đến cấp m.

1.1.2 Các không gian hàm khả tổng

• Tích phân Lebesgue của hàm f trên tập Ω được ký hiệu là

$$\int_\Omega f(x)dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int f(x)dx.$$

• Với $1 \le p < \infty$ ta ký hiệu

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \|f\|^p_{L^p(\Omega)} := \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\},$$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \mathrm{essup}_\Omega |f(x)| < +\infty\},$$

trong đó $\mathrm{essup}_\Omega |f(x)| = \inf_K \{|f(x)| \le K$ hầu khắp $x \in \Omega\}$.
• Nếu $f \in L^p(\Omega')$ đối với mọi $\Omega' \Subset \Omega$ thì hàm f được gọi là p- khả tích tổng địa phương trong Ω. Tập hợp của tất cả các hàm p- khả tích tổng địa phương trong Ω được ký hiệu là $L^p_{loc}(\Omega)$.
• Hàm f (đo được) được gọi là có hạn trong Ω nếu nó bằng không hầu khắp ở ngoài $\Omega' \Subset \Omega$. Tập hợp của các hàm tiêu hạn trong Ω thuộc $L^p(\Omega)$ được ký hiệu là $L^p_o(\Omega)$.

1.2 Không gian Sobolev cấp nguyên dương

1.2.1 Đạo hàm suy rộng theo nghĩa Sobolev

Định nghĩa 1.1. *Giả sử Q là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên trơn từng mảnh ∂Q và $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ là bộ đa chỉ số. Hàm $f^{(\alpha)} \in L^1_{loc}(Q)$ được gọi là đạo hàm suy rộng cấp α của hàm $f \in L^1_{loc}(Q)$, nếu*

$$< f, D^\alpha g > := \int\limits_Q f(x) D^\alpha g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_Q f^{(\alpha)}(x) g(x)\, dx$$
$$=< f^{(\alpha)}, g >, \; \forall g \in C_o^{|\alpha|}(\overline{Q}).$$

Nếu $f \in C^{|\alpha|}(Q)$, thì đạo hàm suy rộng $f^{(\alpha)}$ tồn tại và $f^{(\alpha)} = D^\alpha f(x)$ hầu khắp, nên chúng ta cũng sẽ ký hiệu đạo hàm suy rộng cấp α của hàm f là $D^\alpha f$.

1.2.2 Không gian Sobolev $H^k(Q)$

Định nghĩa 1.2. *Tập hợp của các hàm $f \in L^2(Q)$ có đạo hàm suy rộng cho đến cấp k thuộc $L^2(Q)$ được gọi là không gian Sobolev cấp k và được ký hiệu là $H^k(Q)$. $H^k(Q)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng và chuẩn*

$$(f, g) = \int\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha f \overline{D^\alpha g} \Big) dx,$$

$$\|f\| = \Big[\int\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha f|^2 \Big) dx \Big]^{1/2}.$$

Rõ rằng là $H^0(Q) = L^2(Q)$.

Các tính chất quan trọng của không gian Sobolev:
1) $C^\infty(Q)$ trù mật trong $H^k(Q)$ theo tiêu chuẩn của $H^k(Q)$.
2) $H^{m+1+[n/2]}(Q) \subset C^m(\overline{Q})$.

1.2.3 Khái niệm về vết của hàm số trên một mặt

Định nghĩa 1.3. *Giả sử Q là miền giới nội trong $\mathbb{R}^n$ và S là một mặt $n-1$ chiều được chứa trong $\overline{Q}$. Nếu trong Q cho hàm $f(x)$ xác định tại* từng điểm của Q, thì ta có thể xem giá trị của hàm này trên S như là một hàm $f|_{x\in S}$ được xác định tại mỗi điểm của S. Nếu chúng ta xét trong Q hàm được xác định hầu khắp nơi, thì giá trị của f trên mặt S được xác định không đơn trị vì $\text{mes}S = 0$. Tuy nhiên, trong một nghĩa hoàn toàn xác định chúng ta có thể nói đến giá trị của hàm số trên một mặt $n-1$ chiều khi nó được xác định hầu khắp nơi.

Giả sử $f \in H^1(Q)$ và $f_k \in C^1(\overline{Q})$, $(k = 1, 2, ...)$ hội tụ đến f trong $H^1(Q)$. Đối với mọi mặt trơn từng mảnh (mỗi một mảnh được chiếu đơn trị xuống mặt phẳng tọa độ) trong $\overline{Q}$ tồn tại $C = const > 0$, sao cho

$$\int_S |f_k - f_m|^2 dx \leq C\|f_k - f_m\|_{H^1(Q)}.$$

Vì $L^2(S)$ là không gian định chuẩn đầy đủ, nên tồn tại phần tử $f_S \in L^2(S)$ là giới hạn trong $L^2(S)$ của dãy $f_k(x_S), x_S = x \in S$. Hàm f_S không phụ thuộc vào việc chọn dãy f_k hội tụ đến f trong $H^1(Q)$ và được gọi là vết của hàm f trên mặt S.

1.2.4 Không gian $H_o^k(Q)$

Định nghĩa 1.4. *Tập hợp của các hàm trong $H^k(Q)$ có vết trên biên Γ bằng không được ký hiệu là $H_o^k(Q)$. Chuẩn trong $H_o^k(Q)$ được sinh bởi chuẩn trong $H^k(Q)$. Khi đó $H_o^k(Q)$ là không gian con đóng của $H^k(Q)$.*

1.3 Không gian Sobolev cấp thực (Sobolev - Slobodeskii)

1.3.1 Không gian $H^s(\mathbb{R}^n)$

Định nghĩa 1.5. *Giả sử s là số thực tùy ý. Không gian Sobolev-Slobodeski $H^s(\mathbb{R}^n)$ theo định nghĩa gồm tất cả các hàm suy rộng $u \in \mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, có biến đổi Fourier $\hat{u}(\xi)$ thỏa mãn điều kiện:*

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \tag{1.2}$$