ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ HƯỜNG

# HIỆU CHỈNH BÀI TOÁN TÌM KHÔNG ĐIỂM CỦA TOÁN TỬ ACCRETIVE

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

Người hướng dẫn khoa học:
TS.NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Số hóa bởi trung tâm học liệu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

# Mục lục



So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

# Mở đầu

Bài toán tìm không điểm của toán tử accretive trong không gian Banach có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc nghiên cứu phương trình vi phân đạo hàm riêng trong không gian $L_p$ hay không gian Sobolev $W_p^m$.

Trong đề tài luận văn, chúng tôi nghiên cứu bài toán: tìm phần tử $x_0 \in X$ sao cho

$$A(x_0) = f, \tag{0.1}$$

ở đây $A$ là một toán tử accretive từ không gian Banach phản xạ thực $X$ vào $X$, $f$ là phần tử của $X$. Nếu không có thêm điều kiện đặt lên cho toán tử $A$, chẳng hạn tính accretive đều hoặc accretive mạnh, thì phương trình toán tử (0.1) nói chung là một bài toán đặt không chỉnh, theo nghĩa nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu $A$ và $f$. Để giải loại bài toán này, ta cần sử dụng các phương pháp giải ổn định so cho khi sai số của dữ kiện đầu vào càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu.

Trong [2] Alber và Ryazansteva đã nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov dạng:

$$A(x) + \alpha(x - x^+) = f_\delta \tag{0.2}$$

trong trường hợp toán tử $A$ đơn điệu được cho chính xác, còn vế phải $f$ được cho xấp xỉ bởi $f_\delta$ thỏa mãn $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, $\delta \to 0$, $x^+ \in X$ là một phần tử cho trước thuộc $X$ tùy ý, $\alpha$ là một tham số dương. Với điều kiện liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J$ của không gian $X$, họ đã chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm $x_\alpha^\delta$ của bài toán (0.2), và nghiệm này hội tụ mạnh đến nghiệm $x_0$ của bài toán (0.1) khi $\alpha$, $\delta/\alpha \to 0$.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

Không cần đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J$, tốc độ hội tụ của dãy nghiệm $x_\alpha^\delta$ của bài toán hiệu chỉnh (0.2) được đánh giá với điều kiện

$$\|A(x)-A(y_*)-QA^{'}(y_*)^*J(x-y_*)\| \le \tau\|A(x)-A(y_*)\|,\ \forall y \in X, \quad (0.3)$$

ở đây $\tau$ là một hằng số dương, $Q$ là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của $X^*$ và điều kiện trơn của nghiệm

$$x^+ - y_* = A^{'}(y_*)v. \quad (0.4)$$

với $v$ là phần tử thuộc $X$, $A'$ là đạo hàm Fréchet của $A$.

Đề tài luận văn này nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh bài toán tìm không điểm của toán tử accretive trong không gian Banach. Mục đích của chúng tôi là đọc hiểu, trình bày lại và làm chi tiết hơn kết quả trong [19] về phương pháp hiệu chỉnh với toán tử accretive. Chú ý rằng, trong không gian Hilbert, khái niệm về toán tử accretive trùng với khái niệm về toán tử đơn điệu.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về toán tử accretive và bài toán đặt không chỉnh. Trong chương 2 chúng tôi trình bày phương pháp hiệu chỉnh bài toán tìm không điểm của toán tử accretive trong không gian Banach.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của Cô trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cám ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học,

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

***Tác giả***

***Nguyễn Thị Hường***

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

# Chương 1

# Một số kiến thức bổ trợ

## 1.1 Một số cấu trúc hình học của không gian Banach

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản nhất về cấu trúc hình học của không gian Banach như tính lồi chặt, lồi đều, tính khả vi của chuẩn,...và các định nghĩa, tính chất về các loại toán tử như toán tử accretive, toán tử co rút và ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc. Các kiến thức của chương này được tham khảo từ các tài liệu [1], [9], [15].

### 1.1.1 Không gian Banach lồi chặt và lồi đều

Cho $E$ là không gian Banach và $E^*$ là không gian đối ngẫu của nó, tức là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $E$. Để cho đơn giản và thuận tiện, chúng tôi sử dụng ký hiệu $\|.\|$ để chỉ chuẩn trên $E$ và $E^*$. Ký hiệu $S_E := \{x \in E : \ \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của không gian Banach $E$. Ta viết $\langle x, x^* \rangle$ thay cho giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in E^*$ tại $x \in E$, tức là $\langle x, x^* \rangle = x^*(x), \ \forall x^* \in E^*, x \in E$.

**Định nghĩa 1.1.** *Không gian Banach $E$ được gọi là không gian phản xạ, nếu với mọi phần tử $x^{**}$ của không gian liên hợp thứ hai $E^{**}$ của $E$, đều tồn tại phần tử $x \in E$ sao cho*

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \quad \forall x^* \in E^*.$$

**Định nghĩa 1.2.** *Không gian Banach $E$ được gọi là không gian lồi chặt*

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

*nếu với $x, y \in S_E$ với $x \neq y$ suy ra*

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1, \ \forall \lambda \in (0,1).$$

Điều này cũng có nghĩa là trung điểm $\dfrac{x+y}{2}$ của đoạn thẳng nối hai điểm $x, y$ phân biệt trên mặt cầu đơn vị thì không nằm trên mặt cầu đơn vị. Nói cách khác nếu

$$x, y \in S_E: \ \|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\|,$$

thì $x = y$.

**Ví dụ 1.1.** Xét không gian $E = \mathbb{R}^n$ với $\|x\|_2$ được xác định bởi

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}, \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó $E$ là không gian lồi chặt.

Trong khi đó không gian $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ với chuẩn $\|x\|_1$ xác định bởi

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|, \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

không phải là không gian lồi chặt. Thật vậy, lấy $x = (1, 0, 0, ..., 0); y = (0, 1, 0, ..., 0)$ ta có $x \neq y$, $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ nhưng $\|x + y\|_1 = 2$.

**Định nghĩa 1.3.** *Không gian Banach $E$ được gọi là lồi đều nếu với $\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 2$, các bất đẳng thức sau thỏa mãn $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ và $\|x - y\| \geq \varepsilon$ thì tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho*

$$\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta.$$

**Ví dụ 1.2.** Không gian Hilbert $H$ là không gian lồi đều. Thật vậy, theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\|x + y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) - \|x - y\|^2, \ \forall x, y \in H.$$

Giả sử $x, y \in B_H$ với $x \neq y$ và $\|x - y\| \geq \varepsilon, \ \varepsilon \in (0, 2]$, suy ra

$$\|x + y\|^2 \geq 4 - \varepsilon^2 \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Từ đây suy ra: $\|\dfrac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ với $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{\varepsilon^2}{4}}$.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

**Ví dụ 1.3.** Các không gian $l_1$, $l_\infty$ không lồi đều.

Thật vậy, lấy $x = (1, 0, 0, ...)$, $y = (0, -1, 0, ...) \in l_1$ và $\varepsilon = 1$. Khi đó:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = 1;\ \|y\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| = 1$$

và

$$\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| = 2 > 1 = \varepsilon.$$

Tuy nhiên $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$. Vậy không tồn tại $\delta$ sao cho $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.

**Chú ý 1.1.** $(i)$ *Các không gian $l_p$, $L^p_{[a,b]}$, $1 < p < \infty$ là lồi đều.*

$(ii)$ *Các không gian $l_1$, $c$, $c_0$, $l_\infty$, $L^1_{[a,b]}$, $C_{[a,b]}$ không lồi chặt.*

**Định lý 1.1.** *Mọi không gian lồi đều đều lồi chặt và phản xạ.*

### 1.1.2 Không gian Banach trơn và trơn đều

Cho $C$ là tập con khác rỗng, lồi và đóng của không gian tuyến tính định chuẩn $E$ sao cho điểm gốc của $E$ nằm trong phần trong của $C$. Một phiếm hàm tuyến tính $f \in E^*$ được gọi là tiếp xúc $C$ tại $x_0 \in \partial C$ nếu $f(x_0) = \sup\{f(x), x \in C\}$. Nếu $H = \{x \in X : f(x) = 0\}$ là siêu phẳng, thì tập hợp $H + x_0$ được gọi là siêu phẳng tiếp xúc với $C$ tại $x_0$.

**Định nghĩa 1.4.** *Không gian Banach $X$ được gọi là trơn nếu với mỗi $x \in S_X$ tồn tại duy nhất một phiếm hàm $f_x \in E^*$ sao cho $\langle x, f_x\rangle = \|x\|$ và $\|f_x\| = 1$.*

**Ví dụ 1.4.** $(i)$ Các không gian $l_p$, $L^p_{[a,b]}$, $1 < p < \infty$ là không gian Banach trơn.

$(ii)$ Các không gian $c_0$, $l_1$, $L_1$, $l_\infty$, $L_\infty$ không phải là không gian trơn.

Tính trơn của không gian Banach liên hệ chặt chẽ với tính khả vi Gâteaux của chuẩn.

**Định nghĩa 1.5.** *Chuẩn của không gian $E$ được gọi là khả vi Gâteaux tại điểm $x_0 \in S_E$ nếu với mỗi $y \in S_E$ giới hạn*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t} \tag{1.1}$$

*tồn tại, kí hiệu* $\langle y, \bigtriangledown\|x_0\|\rangle$. *Khi đó* $\bigtriangledown\|x_0\|$ *được gọi là đạo hàm Gâteaux của chuẩn* $\varphi(x) = \|x\|$ *tại* $x = x_0$.

**Định nghĩa 1.6.** *Chuẩn của không gian* $E$ *được gọi là khả vi Gâteaux nếu nó khả vi Gâteaux tại mọi điểm trên mặt cầu đơn vị* $S_E$.

*Chuẩn của* $E$ *được gọi là có chuẩn khả vi Gâteaux đều nếu với mỗi* $y \in S_E$, *giới hạn (1.1) đạt được đều với mọi* $x \in S_E$.

**Ví dụ 1.5.** Không gian Hilbert là không gian có chuẩn khả vi Gâteaux với

$$\bigtriangledown\|x\| = x/\|x\|, \ x \neq 0.$$

**Định lý 1.2.** *Không gian Banach* $E$ *là trơn khi và chỉ khi chuẩn của* $E$ *khả vi Gâteaux trên* $E \setminus \{0\}$.

**Định nghĩa 1.7.** *Cho* $E$ *là không gian Banach. Hàm số* $\rho_E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *được gọi là mô đun trơn của không gian Banach* $E$ *nếu*

$$\begin{aligned}\rho_E(t) &= \sup\Big\{\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = t\Big\}\\ &= \sup\Big\{\frac{\|x+ty\| + \|x-ty\|}{2} - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = 1\Big\}, \ t \geq 0.\end{aligned}$$

**Nhận xét 1.1.** Mô đun trơn $\rho_E$ của không gian Banach $E$ là hàm số xác định, liên tục và tăng trên $[0, +\infty)$.

**Định nghĩa 1.8.** *Không gian Banach* $E$ *được gọi là trơn đều nếu*

$$\rho_E(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\rho_E(t)}{t} = 0.$$

**Ví dụ 1.6.** Mọi không gian Hilbert và không gian $l_p$ $(1 < p < +\infty)$ đều là không gian trơn đều.

Tính trơn đều của không gian Banach liên hệ chặt chẽ với tính khả vi Fréchet đều của chuẩn trong không gian Banach đó.

**Định nghĩa 1.9.** *Chuẩn của không gian Banach* $E$ *được gọi là:*

(*i*) *khả vi Fréchet nếu với mỗi* $x \in S_E$, *giới hạn*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{1.2}$$

*tồn tại đều với mỗi* $y \in S_E$*;*

(*ii*) *khả vi Fréchet đều nếu giới hạn* (1.2) *tồn tại đều với mọi* $x, y \in S_E$.

## 1.2 Toán tử accretive

### 1.2.1 Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc

Ký hiệu $2^E$ là một họ các tập con khác rỗng của $E$.

**Định nghĩa 1.10.** *Cho* $E^*$ *là không gian đối ngẫu của không gian Banach* $E$*. Ánh xạ đa trị* $J : E \to 2^{E^*}$ *được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của* $E$ *nếu*

$$J(x) = \{j \in E^* : \quad \langle x, j\rangle = \|x\|^2,\ \|x\| = \|j\|\}.$$

**Ví dụ 1.7.** Trong không gian Hilbert $H$, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là ánh xạ đơn vị $I$ trong $H$.

**Định nghĩa 1.11.** *Toán tử* $A : E \to E^*$ *được gọi là h-liên tục (hemicontinuous) trên* $E$ *nếu* $A(x + ty) \rightharpoonup Ax$ *khi* $t \rightharpoonup 0$ *với mọi* $x, y \in X$ *và được gọi là d-liên tục (demicontinuous) trên* $E$ *nếu với bất kỳ dãy* $\{x_n\} \subset E$, $x_n \to x$ *thì* $Ax_n \rightharpoonup Ax$ *khi* $n \to \infty$.

Các tính chất của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được trình bày trong mệnh đề sau.

**Mệnh đề 1.1.** *Cho* $E$ *là không gian Banach và* $J : E \to 2^{E^*}$ *là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của* $E$*. Khi đó ta có các phát biểu sau:*

(*a*) *J(0) = 0;*

(*b*) *Với mỗi* $x \in E$, $J(x)$ *là tập con khác rỗng, lồi, đóng và bị chặn của* $E^*$*;*

(*c*) $J(\lambda x) = \lambda J(x)$ *với mọi* $x \in E$ *và* $\lambda \in \mathbb{R}$*, hay* $J$ *là thuần nhất;*

(*d*) $J$ *là đơn điệu, tức là,* $\langle x - y, j(x) - j(y)\rangle \geq 0$ *với mọi* $x, y \in E$, $j(x) \in J(x), j(y) \in J(y)$*;*

(*e*) $\|x\|^2 - \|y\|^2 \geq 2\langle x - y, j(y)\rangle$ *với mọi* $x, y \in X$ *và* $j(y) \in J(y)$*;*

(*f*) *Nếu* $E^*$ *là lồi chặt thì* $J$ *là đơn trị;*

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc-tnu.edu.vn/