Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn đã được sự đồng ý của cá nhân và tổ chức. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2013

Học viên

Nguyễn Thùy Trang

Xác nhận	**Xác nhận**
của Trưởng khoa chuyên môn	**của người hướng dẫn khoa học**
	TS. Trần Nguyên An

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của TS. Trần Nguyên An. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc cho tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi tới các thầy cô Khoa Toán, Khoa Sau đại học Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên cũng như các thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa học 2011-2013, lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục, đào tạo của nhà trường.

Tôi xin cảm ơn Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông - Đại học Thái Nguyên, nơi tôi đang công tác, đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và người thân đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên, cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2013

Học viên

Nguyễn Thùy Trang

Mục lục

Mở đầu

Năm 1964, Hironaka đã giới thiệu khái niệm cơ sở chuẩn tắc cho iđêan các chuỗi lũy thừa hình thức. Một năm sau, năm 1965, Buchberger đã định nghĩa độc lập một khái niệm tương tự cho iđêan các đa thức mà ông gọi là cơ sở Groebner, tên người thầy hướng dẫn của Buchberger, hơn nữa ông còn đưa ra một thuật toán tính cơ sở Groebner, là thuật toán Buchberger. Cơ sở Groebner nhanh chóng trở thành trung tâm của Đại số máy tính (Computer Algebra) và là công cụ hữu hiệu trong rất nhiều bài toán của Đại số giao hoán và Hình học đại số.

Trong luận văn này, chúng tôi trình bày về cơ sở Groebner và một áp dụng của cơ sở Groebner để phân tích nguyên sơ một iđêan trong vành đa thức $K[x, y]$, với K là một trường, theo bài báo "Ideal bases and primary decomposition: case of two variables" của Lazard [3]. Cũng cần phải nói thêm rằng, phân tích nguyên sơ của một iđêan là một bài toán quan trọng trong Đại số giao hoán và Hình học Đại số, đặc biệt là phân tích nguyên sơ của iđêan trong vành đa thức với hệ số trên một trường.

Luận văn bao gồm ba chương. Chương một trình bày một số kiến thức chuẩn bị của luận văn như phân tích nguyên sơ của iđêan trên vành giao hoán, chiều của vành, độ cao của iđêan. Chương hai trình bày chi tiết về cơ sở Groebner và thuật toán Buchberger để tìm cơ sở Groebner theo thuật ngữ của Robbiano [5]. Chương ba trình bày một thuật toán của Lazard về một áp dụng của cơ sở Groebner trong việc tìm phân tích nguyên sơ của một iđêan trong vành đa thức hai biến $K[x, y]$ với K là một trường.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này và toàn bộ luận văn, ta luôn giả thiết A là vành giao hoán có đơn vị.

1.1 Phân tích nguyên sơ

1.1.1 Định nghĩa. Cho Q là một iđêan của A. Ta nói rằng Q là iđêan nguyên sơ của A nếu:

(i) Q là iđêan thật sự của A;

(ii) Với a, b bất kỳ thuộc A mà $ab \in Q$; $a \notin Q$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $b^n \in Q$.

1.1.2 Ví dụ. (i) Mọi iđêan nguyên tố là iđêan nguyên sơ.

(ii) Trong $\mathbb{Z}$, iđêan $4\mathbb{Z}$ là nguyên sơ nhưng không là iđêan nguyên tố.

1.1.3 Bổ đề. *Cho Q là iđêan nguyên sơ của A. Khi đó, $P = \sqrt{Q}$ là iđêan nguyên tố của A và ta nói rằng Q là P - nguyên sơ. Hơn nữa, P là iđêan nguyên tố nhỏ nhất của A chứa Q.*

1.1.4 Bổ đề. *Cho P là iđêan nguyên tố của A; $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ $(n \geq 1)$ là các iđêan P - nguyên sơ của A. Khi đó, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Q_i$ cũng là P - nguyên sơ.*

1.1.5 Mệnh đề. *Cho Q là một iđêan của A sao cho $\sqrt{Q} = \mathfrak{m}$ là một iđêan tối đại của A. Khi đó, Q là iđêan nguyên sơ hay iđêan $\mathfrak{m}$ - nguyên sơ của A.*

1.1.6 Định nghĩa. Cho I là iđêan thực sự của A. Một phân tích nguyên sơ của I là một biểu diễn của I như là giao của hữu hạn các iđêan nguyên sơ của A. Một phân tích nguyên sơ

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_n,$$

với $\sqrt{Q_i} = P_i$ hay Q_i là P_i - nguyên sơ, $i = 1, 2, ..., n$ được gọi là phân tích nguyên sơ tối tiểu của I nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

(i) $P_1, P_2, ..., P_n$ là n iđêan nguyên tố đôi một khác nhau của A,

(ii) $\forall j = 1, ..., n$ ta có $Q_j \not\supseteq \bigcap\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} Q_i$.

Ta nói I là *iđêan phân tích được* của A nếu nó có một phân tích nguyên sơ.

1.1.7 Định lý (Định lý duy nhất thứ nhất)**.** *Cho I là một iđêan phân tích được của A. Giả sử*

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_n$$

với $\sqrt{Q_i} = P_i$; $i = 1, 2, ..., n$ và

$$I = Q'_1 \cap Q'_2 \cap ... \cap Q'_{n'}$$

với $\sqrt{Q'_i} = P'_i$; $i = 1, 2, ..., n'$ là hai phân tích nguyên sơ tối tiểu của I. Khi đó, $n = n'$ và ta có: $\{P_1, P_2, ..., P_n\} = \{P'_1, P'_2, ..., P'_n\}$.

1.1.8 Định nghĩa. Giả sử I là iđêan phân tích được của A, và $I = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_n$, $\sqrt{Q_i} = P_i$, $i = 1, ..., n$ là một phân tích nguyên sơ tối tiểu của I. Khi đó, tập

$$\{P_1, ..., P_n\}$$

độc lập với cách chọn phân tích nguyên sơ tối tiểu của I và được gọi là *tập iđêan nguyên tố liên kết của I*, ký hiệu $\mathrm{Ass}(I)$.

1.1.9 Định nghĩa. Giả sử I là iđêan phân tích được của A. Các phần tử tối tiểu của $\mathrm{Ass}(I)$ được gọi là *các iđêan nguyên tố tối tiểu* của I hay *các iđêan nguyên tố cô lập*, các iđêan nguyên tố liên kết còn lại được gọi là *các iđêan nguyên tố nhúng* của I.

1.1.10 Định lý (Định lý duy nhất thứ hai)**.** *Cho I là một iđêan phân tích được của A,* $\operatorname{Ass}(I) = \{P_1, ..., P_n\}$. *Giả sử*

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_n$$

với $\sqrt{Q}_i = P_i$; $i = 1, 2, ..., n$ và

$$I = Q'_1 \cap Q'_2 \cap ... \cap Q'_n$$

với $\sqrt{Q'_i} = P_i$; $i = 1, 2, ..., n'$ là hai phân tích nguyên sơ tối tiểu của I. Khi đó, với mỗi i mà P_i là iđêan nguyên tố tối tiểu của I thì $Q_i = Q'_i$ hay thành phần nguyên sơ ứng với iđêan nguyên tố cô lập của I là xác định duy nhất bởi I, không phụ thuộc vào cách chọn phân tích nguyên sơ tối tiểu.

1.1.11 Định lý. *Mọi iđêan thực sự trong vành Noether đều có phân tích nguyên sơ, do đó có phân tích nguyên sơ tối tiểu.*

1.1.12 Định lý (Định lý cơ sở Hilbert)**.** *Giả sử A là vành Noether. Khi đó, vành đa thức $A[x_1, ..., x_n]$ cũng là vành Noether.*

1.1.13 Ví dụ. Giả sử K là một trường và $A = K[x, y]$ là vành đa thức của các biến x, y. Ta có:

$$\left\langle xy, y^2 \right\rangle = \langle x, y\rangle^2 \cap \langle y\rangle = \left\langle x, y^2 \right\rangle \cap \langle y\rangle$$

là hai phân tích nguyên sơ tối tiểu của $I = \left\langle xy, y^2 \right\rangle$. Lại có, $\sqrt{\langle x, y\rangle^2} = \sqrt{\langle x, y^2\rangle} = \langle x, y\rangle$ nên $\operatorname{Ass}(I) = \{\langle y\rangle, \langle x, y\rangle\}$, trong đó $\langle y\rangle$ là iđêan nguyên tố cô lập (tối tiểu) của I và $\langle x, y\rangle$ là iđêan nguyên tố nhúng của I.

Mệnh đề sau đưa ra mối liên hệ giữa iđêan nguyên sơ với địa phương hóa. Chú ý, với $S = A \setminus P$ là tập đóng nhân của A, I là iđêan của A, ta ký hiệu $I_P = S^{-1}I$.

1.1.14 Mệnh đề. *Giả sử Q là iđêan nguyên sơ của A với $\sqrt{Q} = P, \overline{P} \in$* $\operatorname{Spec}(A)$. *Khi đó:*

(i) Nếu $P \not\subseteq \overline{P}$ thì $P_{\overline{P}} = Q_{\overline{P}} = A_{\overline{P}}$.

(ii) Nếu $P \subseteq \overline{P}$ thì $P_{\overline{P}} \cap A = P$ và $Q_{\overline{P}} = Q$.

1.2 Chiều và độ cao

1.2.1 Định nghĩa. (*Chiều Krull*) Một dãy giảm thực sự các iđêan nguyên tố $P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset ... \supset P_n$ của vành A được gọi là *một xích nguyên tố có độ dài là* n. Cận trên của độ dài tất cả các xích nguyên tố trong A được gọi là chiều Krull của A, hay chiều của vành A. Kí hiệu là $\dim A$.

1.2.2 Định nghĩa. Giả sử P là một iđêan nguyên tố của A. Chiều của iđêan P là chiều của vành A/P, ký hiệu $\dim P$. Giả sử I là một iđêan bất kỳ của A thì $\dim I = sup\{dimP \mid P \in V(I)\}$, trong đó $V(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của A chứa I.

1.2.3 Định nghĩa. Giả sử P là một iđêan nguyên tố của A. Chiều dài lớn nhất của mọi dãy giảm thực sự các iđêan nguyên tố $P = P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset ... \supset P_r$ xuất phát từ P, được gọi là độ cao của P, kí hiệu là $\operatorname{ht} P$. Giả sử I là một iđêan của A. Độ cao của iđêan I, kí hiệu $\operatorname{ht} I$, được cho bởi công thức $\operatorname{ht} I = inf\{\operatorname{ht} P \mid P \in V(I)\}$.

Mệnh đề sau nhắc lại một số tính chất của chiều và độ cao.

1.2.4 Mệnh đề. *(i) Giả sử* K *là một trường. Khi đó,* $\dim K[x_1, ..., x_n] = n$ *và nếu* $\mathfrak{m}$ *là iđêan tối đại của* $K[x_1, ..., x_n]$ *thì* $\operatorname{ht} \mathfrak{m} = n$.

(ii) Nếu $(A, \mathfrak{m})$ *là một vành địa phương thì* $\dim A = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$.

(iii) Cho P là một iđêan nguyên tố của vành A, khi đó $\dim A_P = \operatorname{ht} PA_P = \operatorname{ht} P$.

(iv) Trong miền phân tích duy nhất D*, mọi iđêan nguyên tố có độ cao* 1 *là iđêan chính.*

1.2.5 Định lý (Định lý iđêan chính của Krull)**.** *Giả sử A là một vành Noether,* I *là iđêan thực sự của* A *sinh bởi* n *phần tử. Khi đó* $\operatorname{ht}(I) \leq n$.

1.2.6 Định nghĩa. Cho $Q \subset P$ là các iđêan nguyên tố của A. Một dãy các iđêan nguyên tố $Q = P_0 \subset P_1 \subset \ldots P_n = P$ sao cho $P_i \neq P_{i+1}, \forall i$, được gọi là một dãy nguyên tố *bão hoà* giữa Q và P nếu với mọi i, không tồn tại một iđêan nguyên tố chèn giữa P_i và P_{i+1}.

Ta nói rằng vành A là *catenary* nếu với mọi iđêan nguyên tố $Q \subset P$ của A luôn tồn tại một dãy nguyên tố bão hoà giữa Q và P và mọi dãy nguyên tố bão hoà giữa Q và P đều có chung độ dài.

Nếu A là một vành catenary và $P \in \operatorname{Spec}(A)$ thì ta có $\dim A = \dim A/P + \operatorname{ht} P$. Ví dụ, vành $K[x_1, ..., x_n]$ là một vành catenary. Đặc biệt, $K[x, y]$ là vành catenary nên nếu $P \in \operatorname{Spec}(K[x, y])$ là iđêan nguyên tố chiều 1 thì $\operatorname{ht} P = 1$. Do đó, theo Mệnh đề 1.2.4(iv) thì P là iđêan chính. Từ đó, ta chứng minh được kết quả sau.

1.2.7 Mệnh đề. *Giả sử* $0 \neq I = \langle f_0, ..., f_k \rangle \neq K[x, y]$, *với* $f_0, ..., f_k \in K[x, y]$, *$K$ là một trường. Khi đó,* $UCLN\,\{f_i\} = 1$ *nếu và chỉ nếu* $\dim I = 0$.

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Vì $I \neq 0$ nên $\dim I = 1$ hoặc $\dim I = 0$. Nếu $\dim I = 1$ thì tồn tại iđêan nguyên tố P sao cho $I \subseteq P$ và $\dim P = 1$. Vì $K[x, y]$ là miền phân tích duy nhất nên P là iđêan chính. Do đó $P = \langle q \rangle$, $q \in K[x, y]$. Do đó $q | f_i$ với mọi $i = 0, ..., k$. Điều này vô lý với giả thiết $UCLN\,\{f_i\} = 1$. Vì vậy $\dim I = 0$.

$(\Leftarrow)$ Giả sử $UCLN\,\{f_i\} \neq 1$. Khi đó tồn tại đa thức bất khả quy $d \in K[x, y]$ thỏa mãn $d | f_i$ với mọi $i = 0, ..., k$. Điều này kéo theo $I \subseteq \langle d \rangle$. Vì d bất khả quy nên $\langle d \rangle$ là iđêan nguyên tố. Mặt khác $\dim I = 0$ nên $\langle d \rangle$ là iđêan tối đại. Do đó $\operatorname{ht} \langle d \rangle = 2$. Vô lý với Định lý iđêan chính của Krull. Do đó $UCLN\,\{f_i\} = 1$. □

Giả sử I là iđêan chiều 0 của A. Nhận xét rằng, chỉ có iđêan tối đại là iđêan nguyên tố chứa I. Do đó, nếu A là vành Noether thì I chỉ có iđêan nguyên tố liên kết là các iđêan tối đại và không có iđêan nguyên tố nhúng. Hay nói cách khác, I biểu diễn duy nhất thành giao của các iđêan nguyên sơ. Đặc biệt, một iđêan của vành $K[x, y]$ có phân tích nguyên sơ duy nhất nếu các đa thức trong tập sinh của nó nguyên tố cùng nhau.

Chương 2

Cơ sở Groebner

Trong chương này, ta nghiên cứu cơ sở Groebner giới hạn trong vành đa thức $A = K[x_1, x_2, ..., x_n] = K[x]$, trong đó K là một trường. Các iđêan trong A có thể được biểu diễn bởi một tập sinh gồm hữu hạn các đa thức, gọi là cơ sở. Ta có thể chỉ ra rằng, với bất kỳ một tập sinh hữu hạn nào của một iđêan I trong A đều có thể dùng thuật toán để biến đổi thành một cơ sở Groebner của I.

2.1 Thứ tự từ

2.1.1 Định nghĩa. Giả sử $\leq$ là một thứ tự toàn phần trên tập T tất cả các đơn thức của $K[x]$. Thứ tự $\leq$ được gọi là *thứ tự từ* nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

(i) Với mọi $m \in T, 1 \leq m$,

(ii) Nếu $m_1, m_2, m \in T$ mà $m_1 \leq m_2$ thì $mm_1 \leq mm_2$.

2.1.2 Bổ đề. *Một thứ tự toàn phần $\leq$ trên T là thứ tự tốt khi và chỉ khi mọi dãy đơn thức thực sự giảm:*

$$m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

đều dừng (sau hữu hạn phần tử).

Chứng minh. Nếu $\leq$ không là thứ tự tốt thì tồn tại tập con $B \subseteq T$ sao cho B không có phần tử nhỏ nhất. Lấy m_1 là phần tử tùy ý thuộc B. Vì B không có