Đại Học Thái Nguyên
Trường Đại Học Khoa Học

Trần Xuân Thiện

TỐC ĐỘ HỘI TỤ TRONG HIỆU CHỈNH PHƯƠNG TRÌNH VỚI TOÁN TỬ J-ĐƠN ĐIỆU TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên Nghành: TOÁN ỨNG DỤNG
MÃ SỐ: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS. Nguyễn Bường

Thái Nguyên - 2013

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS Nguyễn Bường

Phản biện 1: PGS. TS Đỗ Văn Lưu

Phản biện 2: GS. TS Trần Vũ Thiệu

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên
Ngày 12 tháng 10 năm 2013

Có thể tìm hiểu tại
Thư Viện Đại Học Thái Nguyên

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại Trường Đại Học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Giáo sư Nguyễn Bường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ Quốc tế, Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Nhân dịp này em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên em, cổ vũ, động viên, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 08 năm 2013

Học viên

Trần Xuân Thiện

Mở đầu

Rất nhiều bài toán nảy sinh trong thực tiễn, khoa học, công nghệ là các bài toán đặt không chỉnh (ill-posed), khi đó nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Do tính không ổn định này của bài toán đặt không chỉnh nên việc giải số bài toán đó gặp khó khăn. Lý do là một sai số nhỏ trong dữ kiện của bài toán có thể dẫn đến một sai số bất kì trong lời giải bài toán. Vì thế nảy sinh vấn đề tìm các phương pháp giải ổn định cho các bài toán đặt không chỉnh sao cho khi sai số của dữ kiện ban đầu vào càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu. Một trong các phương pháp hiệu quả là phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov.

Mục đích của đề tài này là: chỉ ra sự hội tụ mạnh của thuật toán của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov trong không gian Banach lồi chặt với một chuẩn khả vi Gâteaux đều và đưa ra đánh giá tốc độ hội tụ tối ưu cho nghiệm hiệu chỉnh.

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận và tài liệu tham khảo nội dung của luận văn gồm hai chương.

Trong chương 1 chúng tôi trình bày một số vấn đề cơ bản của không gian Banach và lý thuyết của bài toán đặt không chỉnh với toán tử J-đơn điệu và một số định lí, bổ đề quan trọng có liên quan đến nội dung nghiên cứu của đề tài.

Trong chương 2 chúng tôi trình bày chứng minh sự hội tụ mạnh của thuật toán của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov trong không gian Banach lồi chặt với một chuẩn khả vi Gâteaux đều và đưa ra đánh giá tốc độ hội tụ tối ưu cho nghiệm hiệu chỉnh.

Tuy nhiên do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của các Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 08 năm 2013

Tác giả

Trần Xuân Thiện

Chương 1
Một số vấn đề cơ bản

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích hàm có liên quan đến nội dung nghiên cứu của đề tài. Các khái niệm này được tham khảo trong các tài liệu [1] và [2].

1.1. Không gian Banach

1.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1. *Không gian định chuẩn là không gian tuyến tính X trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ có một số $||x||$ gọi là chuẩn của x, thỏa mãn các điều kiện sau:*

1. $||x|| > 0, \forall x \neq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in X$. *(Bất đẳng thức tam giác)*

3. $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$.

Không gian định chuẩn đầy đủ gọi là không gian Banach.

Ví dụ 1.1.1. Không gian $L^p[a, b]$ với $1 \leq p < \infty$ là không gian Banach với chuẩn

$$||\varphi|| = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ \varphi \in L^p [a, b] .$$

1.1.2. Sự hội tụ trong không gian Banach

Dãy các phần tử x_n trong không gian Banach X được gọi là hội tụ đến phần tử $x_o \in X$ khi $n \to \infty$, nếu $||x_n - x_0|| \to 0$ khi $n \to \infty$, kí hiệu là $x_n \to x_0$. Sự hội tụ theo chuẩn được gọi là hội tụ mạnh.

Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là hội tụ yếu đến $x_0 \in X$, kí hiệu $x_n \rightharpoonup x_0$, nếu với $\forall f \in X^*$-không gian liên hợp của X, ta có $f(x_n) \to f(x_0)$ khi $n \to \infty$.

Tính chất 1.1.1. *Từ định nghĩa trên ta có các tính chất sau*

1. *Từ sự hội tụ mạnh của một dãy x_n suy ra sự hội tụ yếu của dãy đó.*

2. *Giới hạn yếu nếu có của một dãy là duy nhất.*

3. *Nếu $x_n \rightharpoonup x$ thì $\sup\limits_{1 \le n < \infty} \|x_n\| < \infty$ và $\|x\| \le \lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\|$.*

Nhận xét 1.1. *Một số trường hợp từ hội tụ yếu có thể suy ra hội tụ mạnh là:*

1. *X là không gian hữu hạn chiều.*

2. *$\{x_n\} \subset M$ với M là một tập compact trong X.*

1.1.3. Không gian phản xạ

Giả sử X là không gian định chuẩn trên $\mathbb{R}$, X^* là không gian liên hợp của X, $X^{**} = L(X^*, \mathbb{R})$ là không gian liên hợp thứ hai của X. Ta cho tương ứng với mỗi $x \in X$ một phiếm hàm tuyến tính liên tục x^{**} trên X^{**} nhờ hệ thức

$$\langle x^{**}, f \rangle = \langle f, x \rangle, \forall f \in X^{**},$$

ở đây $\langle x^{**}, f \rangle$ là kí hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in X^*$ tại $x \in X$. Ta có $||x|| = ||x^{**}||$. Đặt $h(x) = x^{**}$, nếu $h : X \to X^{**}$ là toàn ánh thì không gian X được gọi là không gian phản xạ.

Ví dụ 1.1.2. Không gian $L^p[0,1]$, $p > 1$ là không gian phản xạ. Mọi không gian định chuẩn hữu hạn chiều đều phản xạ.

Định lý 1.1.1. (xem[2]) *Nếu X là không gian Banach thì các khẳng định sau là tương đương:*

1. *X phản xạ.*

2. *Mọi dãy giới nội là Compact yếu, tức là $\forall \{x_n\} \subset X : \|x_n\| \le K \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}, x_{n_k} \rightharpoonup x \in X$*

3. *Hình cầu đơn vị đóng trong X là compact yếu.*

4. *Mỗi tập bị chặn đóng yếu trong X là compact yếu.*

5. *Mỗi tập lồi đóng bị chặn trong X là compact yếu.*

1.1.4. Đạo hàm Fréchet

Giả sử $f : X \to Y$ là một toán tử từ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Toán tử f được gọi là khả vi Fréchet tại $x \in X$ nếu tồn tại $A \in L(X, Y)$ sao cho

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Toán tử A được gọi là đạo hàm Fréchet của f tại x và được ký hiệu là $A = f'(x)$, f được gọi là khả vi Fréchet nếu nó khả vi Fréchet tại mọi điểm $x \in X$.

1.1.5. Không gian Hilbert

Cho X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong X là một ánh xạ $\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $\langle x, x \rangle > 0, \forall x \neq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in X;$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X.$

Không gian tuyên tính X cùng với tích vô hướng $\langle ., . \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert. Không gian tiền Hilbert đầy đủ gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1.3. Các không gian $\mathbb{R}^n, L^2[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ là các không gian Hilbert với tích vô hướng được xác định tương ứng là

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i, x = (\xi_1, \xi_1, ..., \xi_n), y = (\eta_1, \eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx, \varphi, \psi \in L^2[a, b]$$

1.1.6. Không gian lồi chặt

Không gian Banach X được gọi là không gian lồi chặt nếu mặt cầu đơn vị $S = S(x) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ của X là lồi chặt tức là từ $x, y \in S$ kéo theo $\|x + y\| < 2$. Do đó mọi mặt cầu khác cũng lồi chặt.

Ví dụ 1.1.4. Không gian $L^p[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ là không gian lồi chặt.

1.1.7. Không gian E-S(Ephimov Stechkin)

Không gian Banach X được gọi là Không gian Ephimov Stechkin (hay không gian có tính chất E-S) nếu X phản xạ và trong X sự hội tụ yếu các phần tử ($x_n \rightharpoonup x$) và sự hội tụ chuẩn ($\|x_n\| \to \|x\|$) luôn kéo theo sự hội tụ mạnh ($\|x_n - x\| \to 0$).

Ví dụ 1.1.5. Không gian Hilbert có tính chất $E - S$.

1.1.8. Ánh xạ J-đơn điệu

Cho E là không gian Banach thực và E^* là không gian đối ngẫu.
Để cho đơn giản, chuẩn của E và E^* được ký hiệu là $||.||$.
Ký hiệu $\langle x, x^* \rangle$ là giá trị của $x^* \in E^*$ với $x \in E$.
Ánh xạ $J : E \longmapsto E^*$ đươc gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E nếu thỏa mãn điều kiện sau:

$$\langle x, J(x) \rangle = ||x||^2, ||J(x)|| = ||x||, \forall x \in E.$$

$*$ Toán tử $A : E \longmapsto 2^E$ gọi là m-J-đơn điệu nếu A là toán tử đơn điệu và $\Re(A + \lambda I) = E$ với mọi $\lambda > 0$.
$*$ Cho A là ánh xạ đơn trị m-J-đơn điệu trên E.
Khi đó ánh xạ $A : E \longmapsto E$ có các tính chất:
(i) $\langle A(x) - A(y), j(x - y) \rangle \geq 0, \forall x, y \in E$ ở đây $j(x - y) \in J(x - y)$ và
(ii)$\Re(A + \lambda I) = E$ với mọi $\lambda > 0$ trong đó $\Re(A)$ là miền ảnh của A và I là toán tử đơn vị của E.
Nếu tồn tại hằng số $\alpha > 0$ sao cho:

$$\langle A(x) - A(y), j(x - y) \rangle \geq \alpha ||x - y||^2 \quad \forall x, y \in E$$

thì A gọi là J-đơn điệu mạnh với hằng số α. Khi $\alpha = 0$ thì A gọi là J-đơn điệu.