ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Phạm Thanh Tùng

TÌM NGHIỆM CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN LÀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA MỘT HỌ VÔ HẠN ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Phạm Thanh Tùng

TÌM NGHIỆM CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN LÀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA MỘT HỌ VÔ HẠN ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Một số khái niệm và kiến thức chuẩn bị **2**

1.1 Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert . . . 2

1.1.1 Bất đẳng thức biến phân cổ điển 2

1.1.2 Phương pháp nguyên lý bài toán phụ tìm nghiệm bất đẳng thức biến phân 4

1.2 Một số phương pháp lặp để tìm điểm bất động chung cho một họ ánh xạ không giãn 8

1.2.1 Phương pháp lặp Halpern 9

1.2.2 Phương pháp lặp Mann 11

2 Phương pháp nguyên lý bài toán phụ hiệu chỉnh tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân là điểm bất động chung cho một họ vô hạn các ánh xạ không giãn **13**

2.1 Phương pháp nguyên lý bài toán phụ hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân 13

2.2 Phương pháp nguyên lý bài toán phụ hiệu chỉnh giải bài toán đặt ra 17

Kết luận **27**

Tài liệu tham khảo **28**

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TS. Nguyễn Bường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của thầy trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó giáo sư công tác tại Viện Toán học và các Thầy, các cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy và các cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Phạm Thanh Tùng

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	Tập hợp số thực
$\mathbb{N}$	Tập hợp số tự nhiên
H	Không gian Hilbret H
E	Không gian Banach E
$\langle x, y\rangle$	Tích vô hướng của x và y
$\|x\|_X$	Chuẩn của x trong không gian X
ϕ	Tập rỗng
$\forall x$	Với mọi x
$\exists x$	Tồn tại x
$\inf\limits_{x\in X} F(x)$	Cận dưới lớn nhất của tập $\{F(x) : x \in X\}$
$\sup\limits_{x\in X} F(x)$	Cận trên nhỏ nhất của tập $\{F(x) : x \in X\}$
I	Ánh xạ đơn vị
J	Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J của không gian Banach E
A^*	Toán tử liên hợp của toán tử tuyến tính A
$D(A)$	Miền xác định của toán tử A
$x_k \to x$	Dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x_k \rightharpoonup x$	Dãy $\{x_k\}$ hội tụ yếu tới x
$Fix(T)$	Tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Bài toán tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân và tìm điểm bất động cho lớp ánh xạ không giãn đã được nhiều tác giả nghiên cứu. Cho đến nay các bài toán này vẫn là một trong những vấn đề được sự quan tâm của nhiều nhà toán học ở trong nước cũng như trên thế giới.

Trong phạm vi đề tài luận văn chúng tôi sử dụng một số phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân cũng như phương pháp tìm điểm bất động để kết hợp giữa thuật toán hiệu chỉnh nguyên lý bài toán phụ cho bất đẳng thức biến phân nhằm giải quyết bài toán: Tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân là điểm bất động chung cho họ vô hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Chương 1

Một số khái niệm và kiến thức chuẩn bị

1.1 Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

Trong phần này chúng tôi nêu bài toán, trình bày điều kiện tồn tại nghiệm và phương pháp nguyên lý bài toán phụ để tìm nghiệm bất đẳng thức biến phân.

1.1.1 Bất đẳng thức biến phân cổ điển

Trong luận văn chúng ta luôn giả thiết H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng và chuẩn được ký hiệu tương ứng là $\langle .,. \rangle$ và $\|.\|$. Cho C là một tập con lồi đóng trong H. Ánh xạ F từ C vào H là một ánh xạ liên tục. Bất đẳng thức biến phân cổ điển của ánh xạ đơn trị được phát biểu như sau:

Tìm $x^* \in C$ sao cho:

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \ \forall x \in C. \tag{1.1}$$

Tập những điểm x^* thỏa mãn (1.1) được gọi là nghiệm của bài toán và ký hiệu là $VI(F, C)$.

Bất đẳng thức biến phân cổ điển (1.1) có mối quan hệ mật thiết với nhiều bài toán khác nhau trong đó có bài toán điểm bất động.

- **Bài toán điểm bất động**

Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert H và $T : C \to C$ là một ánh xạ liên tục. Bài toán điểm bất động của ánh xạ đơn trị được phát biểu như sau:

Tìm $x^* \in C$ sao cho:

$$x^* = T(x^*). \tag{1.2}$$

Mệnh đề sau đây cho biết mối quan hệ giữa bài toán điểm bất động với bất đẳng thức biến phân cổ điển.

Mệnh đề 1.1. *Cho C là một tập lồi khác rỗng trong không gian Hilbert H và $T : C \to C$ là một ánh xạ liên tục. Nếu ánh xạ F xác định bởi $F(x) := x - T(x) \quad \forall x \in C$ thì bài toán điểm bất động* (1.2) *tương đương với bất đẳng thức biến phân cổ điển* (1.1).

Sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân cổ điển (1.1) phụ thuộc vào hàm F và miền ràng buộc C. Định lý sau cho ta biết điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán (1.1) trong không gian Hilbert.

Định lý 1.1. *Cho C là một tập lồi, compact của không gian Hilbert H và $F : C \to H$ là một ánh xạ liên tục trên C. Khi đó bài toán* (1.1) *tồn tại ít nhất một nghiệm $x^* \in C$.*

Trong Định lý 1.1 cần tập C phải là một tập compact. Khi tập C không phải là tập compact thì bài toán (1.1) vẫn tồn tại nghiệm khi điều kiện bức sau được thỏa mãn. Cụ thể ta có định lý sau.

Định lý 1.2. *Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert H và $F : C \to H$ là một ánh xạ liên tục trên C. Giả sử tồn tại một tập compact U khác rỗng thuộc C sao cho: với mọi $u \in C \setminus U$, tồn tại $v \in U$ thỏa mãn $\langle F(u), u - v\rangle > 0$. Khi đó, bất đẳng thức biến phân cổ điển* (1.1) *có ít nhất một nghiệm.*

Thông thường nghiệm của bất đẳng thức không phải là duy nhất. Tuy nhiên vẫn có điều kiện để đảm bảo cho sự duy nhất của nghiệm.

Ta giả sử rằng x_1 và x_2 là hai nghiệm khác nhau của bài toán (1.1). Khi đó ta có:

$x_1 \in C : \langle F(x_1), x - x_1\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C$ và

$x_2 \in C : \langle F(x_2), x - x_2\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$

Trong bất đẳng thức thứ nhất ta chọn $x = x_2$ và trong bất đẳng thức thứ 2 ta chọn $x = x_1$, sau đó cộng vế tương ứng của hai bất đẳng thức ta được:

$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2\rangle \leq 0.$

Do đó điều kiện đủ để bài toán (1.1) có nghiệm duy nhất là:

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2\rangle > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in C, \quad x_1 \neq x_2. \tag{1.3}$$

Từ điều kiện (1.3) suy ra bất đẳng thức biến phân cổ điển (1.1) có nghiệm duy nhất. Điều kiện (1.3) được gọi là điều kiện đơn điệu chặt.

1.1.2 Phương pháp nguyên lý bài toán phụ tìm nghiệm bất đẳng thức biến phân

Trong phần trên chúng ta trình bày sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân cổ điển trong không gian Hilbert. Trong phần này ta sẽ trình bày phương pháp nguyên lý bài toán phụ để tìm nghiệm bất đẳng thức biến phân. Trước hết chúng ta nhắc lại một số khái niệm sau:

Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập lồi đóng khác rỗng của H và $F : C \to H$ là một ánh xạ từ C vào H.

• Ánh xạ F được gọi là đơn điệu trên C nếu với $\forall x, y \in C$ ta có: $\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq 0$;

• Ánh xạ F được gọi là giả đơn điệu trên C nếu với $\forall x, y \in C$ ta có: $\langle F(y), x - y\rangle \geq 0$ suy ra $\langle F(x), x - y\rangle \geq 0$;

• Ánh xạ F được gọi là h-liên tục trên C nếu $F(x + ty) \rightharpoonup F(x)$ khi $t \to 0^+$ với $\forall x, y \in C$;

• Ánh xạ F được gọi là L-liên tục Lipschitz trên C, nếu tồn tại ,một hằng số $L > 0$ sao cho với $\forall x, y \in C$ ta có $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$.

• Cho X là một tập con lồi đóng trong H. Một ánh xạ T của X vào H được gọi là không giãn trên X, nếu ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn điều kiện sau: $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in C$.
• Ánh xạ F được gọi là a-đơn điệu mạnh trên C nếu tồn tại một hằng số $a > 0$ sao cho với $\forall x, y \in C$ ta có: $\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq a\|x - y\|^2$.
• Ánh xạ F được gọi là a-ngược đơn điệu mạnh trên C nếu tồn tại một hằng số $a > 0$ sao cho với $\forall x, y \in C$ ta có:
$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq a\|F(x) - F(y)\|^2$.

Dễ dàng thấy rằng ánh xạ F là a-ngược đơn điệu mạnh thì ánh xạ F là một ánh xạ đơn điệu và liên tục Lipschitz. Sau đây là phương pháp nguyên lý bài toán phụ để tìm nghiệm cho bất đẳng thức biến phân cổ điển trong không gian Hilbert.

Phương pháp nguyên lý bài toán phụ được G.Cohen [5] giới thiệu lần đầu vào năm 1980 khi nghiên cứu bài toán tối ưu. Năm 1988, Cohen [5] vận dụng nguyên lý bài toán phụ để xác định nghiệm cho bất đẳng thức biến phân cổ điển. Để trình bày kết quả đó trước hết chúng ta trình bày phương pháp nguyên lý bài toán phụ tổng quát.

Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert H và J là một phiếm hàm lồi trên H.

Giả thiết $\triangle$

Ta nói rằng phiếm hàm J thỏa mãn giả thiết $\triangle$ nếu với mọi dãy $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C$ sao cho $\|u_k\| \to +\infty$ thì $J(u_k) \to +\infty$.
Hiển nhiên phiếm hàm J thỏa mãn giả thiết $\triangle$ nếu C là một tập bị chặn. Ta ký hiệu $J'(u)$ là đạo hàm Gâteaux của phiếm hàm J tại u. Ta xét bài toán tối ưu sau:

Tìm $u^* \in C$ sao cho:

$$J(u^*) = \min_{u\in C} J(u), \tag{1.4}$$

ở đây J là phiếm hàm lồi, liên tục và khả vi Gâteaux. Bổ đề sau đây cho ta biết sự tồn tại nghiệm của bài toán cực trị (1.4).