ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN YÊN BÌNH

TỔNG QUÁT HÓA BỔ ĐỀ SCHWARZ CHO CÁC ÁNH XẠ CHUẨN TẮC CỦA KHÔNG GIAN PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN YÊN BÌNH

TỔNG QUÁT HÓA BỔ ĐỀ SCHWARZ CHO CÁC ÁNH XẠ CHUẨN TẮC CỦA KHÔNG GIAN PHỨC

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Trần Huệ Minh

Thái Nguyên - 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu tham khảo trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả luận văn

Nguyễn Yên Bình

Mục lục

Mở đầu

Việc tổng quát hóa lớp các Bổ đề Schwarz đã được nghiên cứu đầu tiên bởi Cartan-Carathéodory qua kết quả sau:

Định lý: *Cho X là một mặt Riemann hyperbolic và f là một ánh xạ chỉnh hình từ X vào X, có điểm bất động p. Khi đó*

i) $|f'(p)| \leqslant 1$.

ii) $f'(p) = 1$ *khi và chỉ khi* $f = id$.

iii) $|f'(p)| = 1$ *khi và chỉ khi* f *là một tự đẳng cấu.*
Sau đó Abate [3] *chứng minh thêm được một kết quả về sự hội tụ của dãy các ánh xạ lặp* $\{f^n\}$ *của ánh xạ chỉnh hình* f*, đó là:*

iv) $|f'(p)| < 1$ *nếu và chỉ nếu dãy các ánh xạ lặp* $\{f^n\}$ *của* f *hội tụ về* p *với* f^n *được định nghĩa bởi* $f^1 = f$ *và* $f^n = f \circ f^{n-1}$ *với* $n > 1$.

Định lý trên đã được Abate [3] tổng quát hóa cho các ánh xạ chỉnh hình của không gian phức taut và cũng được Kobayashi [10], Kaup [9] mở rộng (các khẳng định i), ii), iii) nhưng với điều kiện yếu hơn) cho các ánh xạ chỉnh hình trên không gian phức hyperbolic. Năm 2000, J. E. Joseph và M. H. Kwack [6] đã đưa ra hai tính chất cho họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình, từ đó đã mở rộng được các kết quả trên cho các ánh xạ chuẩn tắc của không gian phức.

Mục đích của luận văn là nghiên cứu, học tập và hệ thống lại các kết quả nêu trên.

Nội dung của luận văn được trình bày thành hai chương:

Chương I: Một số kiến thức chuẩn bị.

Nội dung của chương này là trình bày một số kiến thức cơ bản của Giải tích phức hyperbolic. Đồng thời trình bày một số khái niệm và tính chất của họ chuẩn tắc, họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình. Những kiến thức này sẽ là cơ sở cho việc nghiên cứu ở chương sau.

Chương II: Tổng quát hóa Bổ đề Schwarz cho các ánh xạ chuẩn tắc của không gian phức

Chương này gồm hai nội dung chính. Thứ nhất là trình bày kết quả mở rộng của Bổ đề Schwarz cho các ánh xạ chỉnh hình của một không gian phức taut, không gian phức hyperbolic và kết quả mở rộng của Bổ đề Schwarz cho các ánh xạ chuẩn tắc của một không gian phức. Thứ hai là trình bày các kết quả về sự hội tụ của dãy các ánh xạ lặp của ánh xạ chỉnh hình (ánh xạ chuẩn tắc) trên không gian phức taut (không gian phức).

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên. Để hoàn thành được bản luận văn này, trước hết tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới TS. Trần Huệ Minh, người cô đã tận tình hướng dẫn giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thành luận văn. Tôi cũng xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn tới các thầy cô trong Khoa Toán, trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học Việt Nam và trường Đại học Sư Phạm Hà Nội đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, làm và hoàn thành luận văn. Luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế, rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn. Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 21 tháng 08 năm 2013

Học viên

Nguyễn Yên Bình

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Đa tạp phức

1.1.1 Định nghĩa

Giả sử X là một không gian tôpô Hausdorff.

+ Cặp (U, φ) được gọi là một *bản đồ địa phương* của X, trong đó U là tập mở trong X và $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ là ánh xạ, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

  i) $\varphi(U)$ là tập mở trong $\mathbb{C}^n$.

  ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

+ Họ $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ các bản đồ địa phương của X được gọi là một *tập bản đồ giải tích (atlas)* của X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

  i) $\{U_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở của X

  ii) Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ánh xạ
  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas trên X. Hai atlas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ được gọi là tương đương nếu hợp $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ là một atlas. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các atlas. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên X, và X cùng với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một *đa tạp phức* n chiều.

1.1.2 Ví dụ

+ Giả sử D là miền trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, D là một đa tạp phức n chiều với bản đồ địa phương $\{(D, \mathrm{Id}_D)\}$.

+ Đa tạp xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Xét $U_i = \{[z_0 : z_1 : ... : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) | z_i \neq 0\}$ với $i = 0, 1, ..., n$. Rõ ràng $\{U_i\}_{i=1}^n$ là một phủ mở của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Xét các đồng phôi $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$

$$[z_0 : z_1 : ... : z_n] \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, ..., \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, ..., \frac{z_n}{z_i}).$$

Ta có

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (z_0, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n) \mapsto (\frac{z_k}{z_j})_{k \neq j}; k = 0, ..., m; z_i = 1.$$

Rõ ràng $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ là ánh xạ chỉnh hình. Vậy $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đa tạp phức n chiều và gọi là đa tạp xạ ảnh n chiều.

1.1.3 Ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức

Giả sử M, N là các đa tạp phức. Ánh xạ liên tục $f : M \to N$ được gọi là *chỉnh hình trên* M nếu với mọi bản đồ địa phương (U, φ) của M và mọi bản đồ địa phương (V, ψ) của N sao cho $f(U) \subset V$ thì ánh xạ

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \text{ là ánh xạ chỉnh hình.}$$

Hay nói cách khác, với mọi $x \in M, y \in N$, tồn tại hai bản đồ địa phương (U, φ) và (V, ψ) tại x và y tương ứng sao cho

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \text{ là ánh xạ chỉnh hình.}$$

Giả sử $f : M \to N$ là song ánh giữa các đa tạp phức. Nếu f và f^{-1} là các ánh xạ chỉnh hình thì f được gọi là *ánh xạ song chỉnh hình* giữa M và N.

1.1.4 Không gian tiếp xúc và phân thớ tiếp xúc của đa tạp phức

Giả sử M là một đa tạp phức m chiều và Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$. Giả sử (U, ϕ, Δ^m) là bản đồ địa phương quanh x; tức là, U là một lân cận của x và $\phi : U \to \Delta^m$ là ánh xạ song chỉnh hình. Đặt $\phi = (z^1, ..., z^m)$. Khi đó $(z^1, ..., z^m)$ là một hệ tọa độ chỉnh hình địa phương quanh x.

Đặt $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$, trong đó x^α và y^α là các giá trị thực. Khi đó $(x^1, ..., x^m, y^1, ..., y^m)$ là hệ tọa độ địa phương thực quanh x, ở đó M được xem như là đa tạp khả vi thực $2m$ chiều. Giả sử T_xM là không gian tiếp xúc của M tại x. Khi đó T_xM là không gian vectơ thực $2m$ chiều, và

$$\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_x, ..., (\frac{\partial}{\partial x^m})_x, (\frac{\partial}{\partial y^1})_x, ..., (\frac{\partial}{\partial y^m})_x\} \tag{1.1}$$

là một cơ sở của T_xM. Ký hiệu $T_xM \otimes_R \mathbb{C}$ là phức hóa của T_xM. Khi đó (1.1) cũng là một cơ sở của không gian vectơ phức $T_xM \otimes_R \mathbb{C}$.

Đặt

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}), 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Ta kí hiệu

$$T_xM = \{\sum_{j=1}^{m} \xi^j (\frac{\partial}{\partial z^j})_x; \xi^j \in \mathbb{C}\}.$$

Khi đó T_xM là một không gian con tuyến tính phức m chiều của $T_xM \otimes_R \mathbb{C}$, mà độc lập với cách chọn hệ tọa độ chỉnh hình địa phương $(z^1, ..., z^m)$. Ta gọi T_xM là *không gian tiếp xúc* của đa tạp phức M tại x.

Đặt

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM \quad \text{(hợp rời)}.$$

Ta định nghĩa phép chiếu $\pi : TM \to M$ bởi điều kiện $\pi(T_xM) = x$. Khi đó TM có cấu trúc của đa tạp phức $2m$ chiều sao cho π là ánh xạ chỉnh hình. Cụ thể hơn, giả sử $(z^1, ..., z^m)$ là hệ tọa độ chỉnh hình địa