ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ SỸ MINH

LÝ THUYẾT NEVANLINNA ĐỐI VỚI TOÁN TỬ SAI PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ SỸ MINH

LÝ THUYẾT NEVANLINNA ĐỐI VỚI TOÁN TỬ SAI PHÂN

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa hoc: PGS. TSKH. TRẦN VĂN TẤN

THÁI NGUYÊN – NĂM 2013

Mục lục

Mở đầu

0.1. Mục đích và lý do chọn luận văn

Một số ước lượng liên quan đến đạo hàm $f \mapsto f'$ của một hàm phân hình đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng và ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna cổ điển. Mục đích của nghiên cứu này là mở rộng lý thuyết Nevanlinna cổ điển tới lý thuyết Nevanlinna đối với toán tử sai phân $f \mapsto \Delta_c f = f(z+c) - f(z)$.

Năm 2006, R. G. Halburd và R. J. Korhonen đã nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna đối với toán tử sai phân. Về sau, hướng nghiên cứu này đã thu hút được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Với mong muốn tiếp cận hướng nghiên cứu này tôi đã chọn luận văn: **"Lý thuyết Nevanlinna đối với toán tử sai phân"**. Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu và trình bày lại một cách chi tiết bài báo "Nevanlinna theory for the difference operator" của R. G. Halburd và R. J. Korhonen đã đăng trên "Annales Academie Sientiarum Fennice, Methematica, Số 31 năm 2006".

0.2. Nội dung nghiên cứu

Luận văn nghiên cứu sự mở rộng Lý thuyết Nevanlinna cổ điển tới lý thuyết Nevanlinna đối với toán tử sai phân $f \mapsto \Delta_c f = f(z+c) - f(z)$.

0.3. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu cơ bản: Đọc bài báo của tác giả theo hướng nghiên cứu, từ đó tìm ra những ý tưởng mới để nghiên cứu. Luận văn giải quyết các vấn đề trọng tâm:

Chương 1. Lý thuyết Nevanlinna cổ điển

Chương này tập trung trình bày về những kiến thức cơ sở của Lý thuyết Nevanlinna cổ điển: Công thức Poisson – Jensen, các hàm Nevanlinna, các định lý cơ bản, Quan hệ số khuyết, định lý Picard và định lý 5 điểm Nevanlinna.

Chương 2. Lý thuyết Nevanlinna đối với toán tử sai phân

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kết quả mở rộng Lý thuyết Nevanlinna cổ điển tới lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân. Một trong những kết quả chính là mô hình hóa định lý cơ bản thứ hai của lý thuyết Nevanlinna. Hệ quả của định lý bao gồm các mô hình hóa của quan hệ số khuyết, định lý Picard, định lý năm điểm Nevanlinna. Nghiên cứu ứng dụng cho phương trình sai phân và đưa ra một số ví dụ minh họa cho kết quả đã trình bày.

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường Đại Học Sư Phạm - Đại Học Thái Nguyên, Đại Học Sư Phạm Hà Nội, Viện Toán Học. Đặc biệt là sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của PGS. TSKH. Trần Văn Tấn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, cô giáo đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua. Xin cảm ơn gia đình và các bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ và động viên tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 07 tháng 7 năm 2013

Tác giả

Vũ Sỹ Minh

Chương 1
Lý thuyết Nevanlinna cổ điển

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở của Lý thuyết Nevanlinna cổ điển.

1.1. Công thức Poisson -Jensen

Điểm $z = a$ được gọi là *điểm bất thường cô lập* của hàm $f(z)$ nếu hàm $f(z)$ là hàm chỉnh hình trong một lân cận nào đó của a, trừ ra tại chính điểm đó.

Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ được gọi là *cực điểm* của hàm $f(z)$ nếu $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

Điểm $z = a$ được gọi là *cực điểm cấp* $m > 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận của a, hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^m}.h(z)$ trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của a và $h(a) \neq 0$

Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong miền D nếu nó là hàm chỉnh hình trong D, trừ ra tại một số bất thường là cực điểm.

Định lý 1.1.1. (Công thức Poisson -Jensen) *Cho $f(z)$ là hàm phân hình trong hình tròn $\{|z| \leq R\}; 0 < R < +\infty$ và $f(z) \not\equiv 0$. Giả sử $a_\mu\,(\mu = 1, 2, ..., M)$ là các không điểm, mỗi không điểm được kể một số lần bằng bội của nó, $b_v\,(v = 1, 2, ..., N)$ là các cực điểm của f trong hình tròn đó, mỗi cực điểm được kể một số lần bằng bội của nó. Khi đó nếu $z = r.e^{i\theta}, (0 < r < R), f(z) \neq 0, f(z) \neq \infty$ thì:*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2\mathrm{Rrcos}(\phi-\theta) + r^2}d\theta$$

$$+\sum_{\mu=1}^{M}\log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\overline{a_\mu}z}\right| - \sum_{v=1}^{N}\log\left|\frac{R(z-b_v)}{R^2-\overline{a_v}z}\right|, \tag{1.1}$$

Công thức (1.1) chỉ ra rằng nếu biết giá trị của môđun $f(z)$ trên biên, các cực điểm và không điểm của $f(z)$ trong $|z| < R$ thì ta có thể tìm được giá trị của môđun $f(z)$ bên trong đĩa $|z| < R$.

Trường hợp đặc biệt tại $z = 0$ công thức (1.1) có dạng:

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta + \sum_{\mu=1}^{M} \log\frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{v=1}^{N} \log\frac{|b_v|}{R}, \quad (1.2)$$

với giả thiết $f(0) \neq 0; f(0) \neq \infty$.

1.2. Các hàm Nevanlinna

Ta định nghĩa:

$$\log^+(x) = \mathrm{Max}\left\{\log x; 0\right\}.$$

Cho f là hàm phân hình trên đĩa $D(r) = \{z \in C : |z| < r\}$, với $0 < r \leq \infty$. Ta kí hiệu $n(r, f)$ là số cực điểm của f trong đĩa đóng $\overline{D}$(r).

Hàm đếm tại cực điểm của f, ký hiệu $N(r, f)$ và được xác định như sau

$$N(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f)\log \mathrm{r},$$

trong đó $n(0, f) = \lim\limits_{t\to 0}\inf n(t, f)$.

Hàm xấp xỉ của hàm f được kí hiệu $m(r, f)$ và được xác định bởi:

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

Hàm đặc trưng Nevanlinna của f, ký hiệu là $T(r, f)$ và được xác định bởi

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Với mỗi $a \in \mathbb{C}$, ký hiệu $n(r; \dfrac{1}{f-a})$ là *số các $a-$ điểm* của f kể cả bội trong đĩa đóng $\overline{D}$(r).

Hàm đếm tại các $a-$ điểm của f, ký hiệu là $N(r; \dfrac{1}{f-a})$, được xác định bởi

$$N(r,\frac{1}{f-a})=\int\limits_0^r\frac{n(t,\dfrac{1}{f-a})-n(0,\dfrac{1}{f-a})}{t}dt+n\left(0,\frac{1}{f-a}\right)\log \mathrm{r}.$$

Hàm xấp xỉ tại các a− điểm của hàm f, được ký hiệu $m(r,\dfrac{1}{f-a})$, được xác định bởi

$$m(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f\left(re^{i\theta}\right)-a|}d\theta.$$

Hàm đặc trưng Nevanlinna tại các a− điểm của hàm f, được ký hiệu $T(r,\dfrac{1}{f-a})$, được xác định bởi:

$$T(r,\frac{1}{f-a})=m(r,\frac{1}{f-a})+N(r,\frac{1}{f-a}).$$

Với $x>0$ thì $\log x=\log^+x-\log^+\left(\dfrac{1}{x}\right)$, suy ra

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\left(\frac{1}{|f\left(re^{i\theta}\right)|}\right)d\theta.$$

Công thức (1.2) có dạng

$$\log|f\left(0\right)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(\mathrm{re}^{i\theta}\right)\right|d\theta+\sum_{v=1}^{N}\log\frac{r}{|b_v|}$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f\left(\mathrm{re}^{i\theta}\right)|}d\theta+\sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{r}{|a_\mu|}\right)$$

Suy ra

$$\log|f\left(0\right)|=m\left(r,f\right)+N\left(r,f\right)-\left[m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)\right].$$

Vậy

$$\log|f\left(0\right)|=T\left(r,f\right)-T\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

Hay

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T\left(r, f\right) - \log\left|f\left(0\right)\right|. \qquad (1.3)$$

Một số tính chất của các hàm Nevanlinna

1. $m(r, \sum\limits_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} m(r, f_k) + \log n;$
2. $m(r, \prod\limits_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} m\left(r, f_k\right);$
3. $N(r, \sum\limits_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} N(r, f_k);$
4. $N(r, \prod\limits_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} N\left(r, f_k\right);$
5. $T(r, \sum\limits_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} T(r, f_k) + \log n;$
6. $T(r, \prod\limits_{k=1}^{n} f_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} T\left(r, f_k\right).$

Trong trường hợp đặc biệt với $n = 2$, $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = -a$ (a là hằng số) ta có

$$T\left(r, f - a\right) \leq T\left(r, f\right) + T\left(r, a\right) + \log 2,$$

suy ra

$$T\left(r, f - a\right) \leq T\left(r, f\right) + \log^+|a| + \log 2.$$

Vậy

$$T\left(r, f\right) - T\left(r, f - a\right) \geq -\left(\log^+|a| + \log 2\right). \qquad (1.4)$$

Với $f_1(z) = f(z) - a$, $f_2(z) = a$ ta có

$$T\left(r, f\right) = T\left(r, f - a + a\right) \leq T\left(r, f - a\right) + T\left(r, a\right)$$

Suy ra

$$T\left(r, f\right) \leq T\left(r, f - a\right) + \log^+|a| + \log 2.$$

Vậy

$$T\left(r, f\right) - T\left(r, f - a\right) \leq \log^+|a| + \log 2. \qquad (1.5)$$

Từ (1.4) và (1.5) ta được

$$\left|T\left(r, f\right) - T\left(r, f - a\right)\right| \leq \log^+|a| + \log 2, \forall a \in \mathbb{C}. \qquad (1.6)$$

1.3. Các định lý cơ bản

Định lý 1.3.1. (Định lý cơ bản thứ nhất) *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên đĩa đóng $\overline{D}(\mathrm{r}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Khi đó ta có:*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) - \log|f(0) - a| + \varepsilon(r, a), \tag{1.7}$$

trong đó $|\varepsilon(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2$.
Hay

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1), \tag{1.8}$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng bị chặn.

Chứng minh. Theo (1.3) ta có

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f-a) - \log|f(0) - a|.$$

Theo (1.6) ta có

$$T(r, f-a) = T(r, f) + \varepsilon(r, a),$$

trong đó $|\varepsilon(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2$. Do đó

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \log|f(0) - a| + \varepsilon(r, a).$$

Suy ra

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1).$$

Định lý được chứng minh. □

Định lý 1.3.2. (Bất đẳng thức cơ bản) *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên đĩa đóng $\overline{D}(\mathrm{r})$. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_q$ là các số phức phân biệt, $\delta > 0$ và $|a_\mu - a_v| \geq \delta; 1 \leq \mu < v \leq q$. Khi đó*

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) \leq 2T(r, f) - N_1(r, f) + S(r, f), \tag{1.9}$$