ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN VĂN PÁO

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM KÉP

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Luận văn được hoàn thành tại
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS NÔNG QUỐC CHINH

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học khoa học - ĐHTN
Ngày ... tháng ... năm 2013

Có thể tìm hiểu luận văn tại thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

MỞ ĐẦU

Nghiệm của đa thức là một phần rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực của Toán hoc, chẳng hạn: Đại số, Giải tích, Hình học, Toán rời rạc...vv. Trong chương trình toán phổ thông, phần đa thức và nghiệm của đa thức chủ yếu được đưa vào bộ môn Đại số và Giải tích. Đặc biệt trong các kỳ thi đại học, học sinh giỏi quốc gia và quốc tế đều có những bài toán liên quan đến nghiệm bội của đa thức. Chính vì vậy mà chuyên đề về nghiệm bội của đa thức rất thiết thực với những ai muốn tìm hiểu sâu về toán sơ cấp.

Từ các kết quả đạt được trong phương pháp nghiệm bội của đa thức chúng ta có thể vận dụng giải một số bài toán về hình học rất phức tạp, giải hệ phương trình và xây dựng một số kết quả về Tổ hợp, chứng minh bất đẳng thức. Khi xét đa thức ta thường quan tâm đến nghiệm, nghiệm bội của đa thức. Nội dung của luận văn nhằm giải quyết hai vấn đề chính:

Vấn đề 1: Chứng minh lại, một số kết quả cơ bản về nghiệm và nghiệm bội của phương trình mà các kết quả ấy gắn liền với tên tuổi của những nhà toán học lỗi lạc. Vận dụng các kết quả đạt được để giải quyết một số bài toán đã được đặt ra.

Vấn đề 2: Đưa ra cơ sở của phương pháp nghiệm kép, vận dụng phương pháp nghiệm kép giải: Bài toán tiếp xúc với trục hoành; bài toán tiếp xúc của hai đồ thị; Bài toán tiế tuyến; Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép.

Luận văn này được chia làm hai chương.

Chương I: Nghiệm của đa thức.

(1) Nội dung chương I trình bày một số khái niệm về vành đa thức, nghiệm của đa thức, nghiệm của phương trình.

Chương II: Phương pháp nghiệm kép.

(2) Nội dung chương II trình bày về cơ sở của phuwownbg pháp nghiệm kép, vận dụng phương pháp nghiệm kép giải các bài toán: Bài toán tiếp xúc với trục hoành; bài toán tiếp xúc của hai đồ thị; Bài toán tiế tuyến; Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép, bài toán nghiệm kép vận dụng giải bất đẳng thức.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót nhất định, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TS Nông Quốc Chinh. Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tiếp theo em xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện đã đọc và góp ý để em hoàn thiện luận văn của mình. Em xin được cảm ơn chân thành nhất tới Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản. Xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp đã cảm thông, chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ trong thời gian em học cao học và viết luận văn. Lời cuối em xin chúc sức khỏe các thầy cô giáo và đồng nghiệp.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2013

Người thực hiện

Bàn Vàng Pao

Chương 1

Nghiệm của đa thức - Nghiệm của phương trình

1.1 Nghiệm của đa thức.

Định nghĩa 1.1.1.
Giả sử K là một trường số nào đó, A là trường con của K. Một phần tử $\alpha \in K$ gọi là nghiệm của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(\alpha) = 0$. Ta cũng nói α là nghiệm của phương trình đại số $f(x) = 0$. Nếu $degf(x) = n$ gọi là phương trình đại số bậc $n(n \geq 1)$.

Định lý 1.1.2 (Định lý Bezout).
Cho vành đa thức $A_{[x]}, f(x) \in A_{[x]}, \alpha \in A$. Dư trong phép chia f(x) cho $x - \alpha$ là $f(\alpha)$.

Hệ quả 1.1.3.
Phần tử $\alpha \in A$ là nghiệm của đa thức $f(x) \in A[x]$, nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $x - \alpha$ trong $A[x]$.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - \alpha).q(x)$$

tức $f(\alpha) \vdots (x - \alpha)$.

Định lý 1.1.4. *Mọi đa thức*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \in A[x]\ ,\ \ a_0 \neq 0$$

có thể viết dưới dạng $f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$ trong vành $K[x]$. Ở đây $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là những nghiệm của đa thức $f(x)$ trong trường mở rộng K của A.

1.2 Nghiệm bội và tính chất của nghiệm bội.

Định nghĩa 1.2.1.
Giả sử k là một số tự nhiên khác 0. Một phần tử $\alpha \in A$ gọi là nghiệm bội cấp k

của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-p\alpha)^k$ đồng thời không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$.

$$f(x) = (x-\alpha)^k q(x) \quad (q(\alpha) \neq 0),$$

$k = 1$ thì α gọi là nghiệm đơn.
$k = 2$ thì α gọi là nghiệm kép.

Định lý 1.2.2 (Định lí cơ bản của đại số cổ điển).
Mọi đa thức $f(x)$ với hệ số phức, $\deg f(x) \geq 1$ *có đúng n nghiệm phức, kể cả số bội của mỗi nghiệm.*

1.3 Công thức Viet.

Định lý 1.3.1. *Cho $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \in A[x]$, $a_0 \neq 0$ là một đa thức bất kì và $f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$. Ở đây, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là những nghiệm của đa thức $f(x)$. Khi đó,*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k + ... + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}...\alpha_n = (-1)^k\dfrac{a_k}{a_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases} \tag{1.1}$$

1.1 Gọi là công thức Viet.

1.4 Nghiệm của đa thức với hệ số nguyên.

Với mọi $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ luôn tìm được số nguyên $m \neq 0$ để $mf(x) = g(x)$, $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (m-mẫu số chung các hệ số của $f(x)$).

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}\ ,\ \ f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0.$$

Do đó, để xét nghiệm của đa thức trên $\mathbb{Q}$, ta chỉ cần xét nghiệm của đa thức trên $\mathbb{Z}$.

Định lý 1.4.1. *Nếu u và v là những số nguyên tố cùng nhau và nếu số hữu tỉ $\alpha = \dfrac{u}{v}$ là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,$$

thì $a_0 \vdots v$ và $a_n \vdots u$.

Hệ quả 1.4.2.
●*Mọi nghiệm nguyên của đa thức với hệ số nguyên đều là ước của hạng tử tự do.*
●*Mọi nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên có hệ số cao nhất bằng 1 đều là nghiệm nguyên.*

Bài toán
Cho đa thức với hệ số nguyên

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n.$$

Chứng minh rằng nếu α là 1 nghiệm nguyên của đa thức

$$\varphi(x) = y^n + a_1y^{n-1} + a_0^{n-2}a_{n-1}y + a_0^{n-1}a_n,$$

thì $\dfrac{\alpha}{a_0}$ cũng là nghiệm của đa thức đã cho.

Định lý 1.4.3. *Nếu số hữu tỉ* $\alpha = \dfrac{u}{v}, \quad ((u,v) = 1)$ *là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

thì với mọi số nguyên m, số $p(m) \vdots (mv - u)$. *Trong trường hợp đặc biệt* $(u + v)$ *là ước của* $p(-1)$ *còn* $(u - v)$ *là ước của* $p(1)$.

Hệ quả 1.4.4. *Nếu* $\alpha = \pm 1$ *là nghiệm của của đa thức*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

thì $\dfrac{f(1)}{1-\alpha}$ *và* $\dfrac{f(-1)}{1+\alpha}$ *đều nguyên.*

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng, mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó chính là nội dung Định lý cơ bản của đại số. Người đầu tiên chứng minh Định lý này là nhà toán học C. Gauss (1777-1855).

Định nghĩa 1.4.5. Trường K được gọi là một *trường đóng đại số* nếu mọi đa thức bậc dương thuộc $K[x]$ đều có nghiệm trong K.

Như vậy, trong $K[x]$ mọi đa thức bậc dương đều phân tích được thành tích các nhân tử tuyến tính khi K là một trường đóng đại số.

Bổ đề 1.4.6. *Mỗi đa thức bậc lẻ thuộc* $\mathbb{R}[x]$ *đều có ít nhất một nghiệm thực thuộc* $\mathbb{R}$.

Bổ đề 1.4.7. *Mỗi đa thức bậc hai thuộc* $\mathbb{C}[x]$ *đều có hai nghiệm thuộc* $\mathbb{C}$.

Định lý 1.4.8. [D'Alembert - Gauss, Định lý cơ bản của đại số] *Mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.*

Hệ quả 1.4.9. *Mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ với bậc $n > 0$ đều có n nghiệm trong $\mathbb{C}$ và các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$ là các đa thức bậc nhất.*

Bổ đề 1.4.10. *Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$. $f(x)$ là đa thức bất khả quy khi và chỉ khi hoặc $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$.*

Định lý 1.4.11. *Mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành dạng*

$$f(x) = a(x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_s)^{n_s} (x^2 + b_1 x + c_1)^{d_1} \dots (x^2 + b_r x + c_r)^{d_r}$$

với các $b_i^2 - 4c_i < 0$ cho $i = 1, \dots, r$ khi $r \geqslant 1$.

Định lý 1.4.12. [Viét] *Giả sử $x_1, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n sau đây: $f(x) = x^n - \delta_1 x^{n-1} + \delta_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \delta_n$. Khi đó có các hệ thức*

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \delta_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \\ \dots \\ \delta_n = x_1 x_2 \dots x_n. \end{cases}$$

Định lý 1.4.13. *Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là một đa thức đối xứng khác 0.*
Khi đó tồn tại một và chỉ một đa thức $s(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = s(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.

1.5 Tính chặn nghiệm trên $\mathbb{C}$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng, mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó chính là nội dung Định lý cơ bản của đại số. Người đầu tiên chứng minh định lý này là nhà toán học C. Gauss (1777-1855).

Định nghĩa 1.5.1. Trường K được gọi là một *trường đóng đại số* nếu mọi đa thức bậc dương thuôc $K[x]$ đều có nghiệm trong K.

Như vậy, trong $K[x]$ mọi đa thức bậc dương đều phân tích được thành tích các nhân tử tuyến tính khi K là một trường đóng đại số.

Bổ đề 1.5.2. *Mỗi đa thức bậc lẻ thuộc $\mathbb{R}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thực thuộc $\mathbb{R}$.*

Bổ đề 1.5.3. *Mỗi đa thức bậc hai thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có hai nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.*

Định lý 1.5.4. [**D'Alembert - Gauss, Định lý cơ bản của đại số**] *Mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.*

Từ Định lý 1.5.4 suy ra kết quả sau đây về đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$

Hệ quả 1.5.5. *Mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ với bậc $n > 0$ đều có n nghiệm trong $\mathbb{C}$ và các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$ là các đa thức bậc nhất.*

Bổ đề 1.5.6. *Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$. $f(x)$ là đa thức bất khả quy khi và chỉ khi hoặc $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$.*

Định lý 1.5.7. *Mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành dạng*

$$f(x) = a(x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_s)^{n_s}(x^2 + b_1 x + c_1)^{d_1} \dots (x^2 + b_r x + c_r)^{d_r}$$

với các $b_i^2 - 4c_i < 0$ cho $i = 1, \dots, r$ khi $r \geqslant 1$.

Định lý 1.5.8. [**Viét**] *Giả sử $x_1, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n sau đây: $f(x) = x^n - \delta_1 x^{n-1} + \delta_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \delta_n$. Khi đó có các hệ thức*

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \delta_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \\ \dots \\ \delta_n = x_1 x_2 \dots x_n. \end{cases}$$

Định lý 1.5.9. *Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là một đa thức đối xứng khác 0. Khi đó tồn tại một và chỉ một đa thức $s(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = s(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.*

Bổ đề 1.5.10. *Cho đa thức $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x], a_0 \neq 0$. Nếu số hữu tỷ $\dfrac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì*
(i) p là một ước của a_n và q là một ước của a_0.
(ii) $p - mq$ là một ước của $f(m)$ cho mọi số nguyên m.

Hệ quả 1.5.11. *Nghiệm hữu tỷ của đa thức $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ phải là số nguyên.*