ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VƯƠNG MẠNH CƯỜNG

NGUYÊN LÝ PHÂN RÃ TRONG QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: GS - TS. Trần Vũ Thiệu

Phản biện 1: **TS: Nguyễn Văn Ngọc** - Viện Toán học

Phản biện 2: **GS. TS: Nguyễn Bường** - Viện CNTT

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên
Ngày 12 tháng 10 năm 2013

Có thể tìm hiểu tại
Thư Viện Đại Học Thái Nguyên

Mục lục

Mở đầu

Qui hoạch tuyến tính (Linear Programming) là bài toán tối ưu đơn giản nhất. Đó là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm tuyến tính với các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính. Qui hoạch tuyến tính có nhiều ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết và thực tiễn. Phương pháp đơn hình (do G. B. Dantzig đề xuất năm 1947) là phương pháp quen thuộc, có hiệu quả để giải bài toán qui hoạch tuyến tính và các bài toán đưa được về qui hoạch tuyến tính.

Phương pháp đơn hình có nhiều biến thể khác nhau. Chẳng hạn, với bài toán qui hoạch tuyến tính có nhiều hệ số bằng không, ta thường dùng thuật toán đơn hình cải biên để tận dụng độ thưa của các hệ số khác không. Với bài toán có cấu trúc đặc biệt, ta cần sử dụng các thuật toán riêng, hiệu quả.

Luận văn này dề cập tới nguyên lý phân rã Dantzig - Wolfe và nguyên lý phân rã Benders để giải các bài toán qui hoạch tuyến tính có kích thước lớn hoặc có cấu trúc đặc biệt (cấu trúc ma trận khối hay cấu trúc ma trận bậc thang). Ý tưởng cơ bản của kỹ thuật phân rã là đưa bài toán ban đầu về các bài toán con nhỏ hơn (ít biến số hơn hoặc ít ràng buộc hơn) hoặc có thể tận dụng cấu trúc riêng của bài toán con (chẳng hạn cấu trúc bài toán vận tải) để giải hiệu quả hơn.

Ta bắt đầu từ trường hợp đơn giản, ở đó bài toán gồm hai khối ràng buộc độc lập nhau (two independent subsystems) không có biến số chung. Chẳng hạn,

$$z = \sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j x_j \to Min$$

Với điều kiện.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1} a_{\mathrm{ij}} x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m_1 \\ \sum_{j=n_1+1}^{n_1} a_{\mathrm{ij}} x_j &= b_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{0.1}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Do không có mối liên hệ nào giữa hai khối này (trừ hàm mục tiêu) nên rõ ràng là nghiệm của bài toán qui hoạch tuyến tính (0.1) có thể tìm bằng cách giải hai qui hoạch tuyến tính con (mỗi qui hoạch ứng với một khối) tách biệt nhau, rồi cộng hai giá trị tối ưu lại để nhận được giá trị tối ưu chung z.

Một mở rộng của bài toán (0.1) là bài toán có cấu trúc góc - khối (block - angular system) (0.2) sau đây. Bài toán này có K khối độc lập nhau và các ràng buộc liên kết:

$$z = (c^0)^T x^0 + (c^1)^T x^1 + \dots + (c^k)^T x^k \to Min$$

Với điều kiện

$$\begin{array}{rcl} A^0x^0 + A^1x^1 + \ldots + A^Kx^K &=& b \\ B^1x^1 \qquad\qquad\qquad &=& b^1 \\ \ddots \qquad & & \vdots \\ B^Kx^K &=& b^K \end{array} \tag{0.2}$$

$$x^0 \geq 0,\ x^1 \geq 0,\ \dots,\ x^K \geq 0.$$

Có thể giải thích ý nghĩa thực tế của mô hình khối (0.2) như sau: Giả sử một công ty gồm K nhà máy hoạt động gần như độc lập k = 1, ... , K. Mỗi nhà máy có các ràng buộc riêng, độc lập với ràng buộc của các nhà máy khác. Tuy nhiên, giữa các nhà máy có một số ràng buộc chung, như hạn chế về tài chính, về lao động lành nghề và có một hàm lợi ích chung đại diện cho quyền lợi của công ty và K nhà máy. Trong bài toán (0.2) x^k là véctơ biểu thị cường độ hoạt động của nhà máy thứ k và x^0 là cường độ hoạt động của bộ phận quản lý công ty, không là hoạt động của bất cứ nhà máy nào. Dòng thứ nhất là hàm mục tiêu chung cho toàn công ty; dòng thứ hai là m ràng buộc về sử dụng chung m tài nguyên khan hiếm (tài chính, lao động lành nghề ...); dòng thứ ba là x^1 ràng buộc chỉ riêng của nhà máy thứ nhất và dòng cuối cùng là mK ràng buộc chỉ riêng của nhà máy thứ K.

Cấu trúc góc khối (0.2) gợi ý cho ta chia nhỏ bài toán ban đầu thành K bài toán con độc lập nhau, rồi sau đó điều chỉnh lời giải các bài toán này để tính đến các ràng buộc liên kết chung. Một cách xử lý khá phổ biến đối với các nhà kinh tế là bắt đầu từ định giá tuỳ ý các tài nguyên khan hiếm và để cho các nhà máy tự tối ưu hoá hoạt động của mình với điều kiện là nhà máy phải trả tiền cho các tài nguyên hiếm theo giá đã qui định. Các tài nguyên khan hiếm mà bộ phận quản lý công ty và các nhà máy cần đến nói chung vượt quá mức b (nguồn tài nguyên công ty đã có). Bài toán trở thành tìm một thuật toán hiệu qủa để điều chỉnh các giá (các nhân tử Lagrange). Nguyên lý phân rã Dantzig-Wolfe cho phép làm việc này nhờ một số hữu hạn lần lặp.

Phân rã Benders thực chất là phân rã Dantzig - Wolfe áp dụng vào bài toán đối ngẫu. Theo cách này, số biến của bài toán được giảm bớt bằng cách thêm nhiều ràng buộc mới vào bài toán đối ngẫu. Trong phân rã Dantzig - Wolfe các cột của "bài toán chủ" được sinh ra khi cần. Trong phân rã Benders cũng vậy, các ràng buộc của bài toán chủ Benders chỉ được sinh ra khi cần đến.

Một lớp bài toán khác cũng hay gặp trong thực tiễn và có thể áp dụng nguyên lý phân rã là các hệ thống bậc thang (staircase systems). Các hệ thống này khác với hệ thống góc - khối (0.2) ở chỗ: các hoạt động ở mỗi bước thang chia sẻ các nguyên liệu đầu vào và các sản phẩm đầu ra với hai. bước thang liền trước và ngay sau nó. Chẳng hạn, (0.3) mô tả một hệ thống bậc thang có bốn cấp.

$$z = (c^1)^T x^1 + (c^2)^T x^2 + (c^3)^T x^3 + (c^4)^T x^4 \to \min$$

Với điều kiện

$$\begin{array}{llllcl} A^{11}x^1 & & & & = & b^1, \\ A^{21}x^1 + A^{22}x^2 & & & & = & b^2, \\ & A^{32}x^2 + A^{33}x^3 & & & = & b^3, \\ & & A^{43}x^3 + A^{44}x^4 & & = & b^4, \end{array} \tag{0.3}$$

$$x^1 \geq 0,\ x^2 \geq 0,\ x^3 \geq 0,\ x^4 \geq 0.$$

Hệ thống bậc thang thường náy sinh khi xét các quá trình diễn ra theo thời gian, trong đó các hoạt động ở một thời kỳ (hay giai đoạn) trực tiếp tác động tới (hay chịu ảnh hưởng bởi) các hoạt động ở thời kỳ tiếp sau (hay liền trước) mà không có tác động tới (hay chịu ảnh hưởng bởi) các hoạt động ở các thời kỳ (giai đoạn) khác. Các hệ thống như thế nảy sinh trong sản xuất khi hoạt động sản xuất ở mỗi giai đoạn chỉ chịu ảnh hưởng bởi sản xuất ở giai doạn liền trước và chỉ có tác động tới sản xuất ở giai đoạn liền sau. Trong các bài toán như thế, thường một số ma trận con trên đường chéo chính A^{ii} là giống nhau và một số ma trận con trên đường chéo phụ $A^{i,i-1}$ cũng giống nhau. Khi đó có thể khai thác cấu trúc đặc biệt này để giải bài toán.

Nội dung luận văn được chia thành ba chương chính.

Chương 1 với tiêu đề "Kiến thức chuẩn bị" trình bày một số kiến thức cơ sở về tập lồi, tập lồi đa diện, cách xác định tập đỉnh và tập cạnh vô hạn của một tập lồi đa diện và định lý biểu diễn tập lồi đa diên qua các đỉnh và cạnh vô hạn của nó. Nêu các kiến thức cần thiết về bài toán qui hoạch tuyến tính và tính chất, cách xây dựng bài toán đối ngẫu và các quan hệ đối ngẫu trong qui hoạch tuyến tính. Cuối chương nhắc lại thuật toán đơn hình cải biên giải qui hoạch tuyến tính. Thuật toán này sẽ được dùng đến ở chương sau để giải "bài toán chủ" theo phân rã Dantzig - Wolfe.

Chương 2 với tiêu đề "Nguyên lý phân rã Dantzig - Wolfe" trình bày thuật toán theo nguyên lý phân rã Dantzig - Wolfe giải qui hoạch tuyến tính có kích thước lớn hoặc có cấu trúc ma trận khối đặc biệt: nêu ý tưởng của phương pháp và các kỹ thuật tính toán cụ thể. Ý tưởng của cách phân rã này là đưa bài toán với nhiều ràng buộc về bài toán ít ràng buộc hơn (gọi là bài toán chủ) nhưng với rất nhiều biến. Cột hệ số của các biến này sẽ được tìm dần khi cần, nhờ giải các bài toán phụ. Trường hợp miền ràng buộc của bài toán con không bị chặn và vấn đề tìm phương án cực biên ban đầu cho bài toán chủ cũng được xét tới và sau đó nêu một ví dụ số để minh hoạ. Cuối chương nêu áp dụng phân rã Dantzig - Wolfe vào bài toán qui hoạch tuyến tính có cấu trúc ma trận đường chéo khối.

Chương 3 với tiêu đề "Nguyên lý phân rã Benders" trình bày thuật toán theo nguyên lý phân rã Benders giải qui hoạch tuyến tính, trong đó các véctơ điều kiện của bài toán được tách thành hai nhóm, đồng thời các véctơ thuộc nhóm thứ nhất có cấu trúc đặc biệt (chẳng hạn cấu trúc bài toán vận tải, cấu trúc ma trận khối hay cấu trúc ma trận bậc thang ...), cho phép khi giải bài toán chỉ với các véctơ điều kiện thuộc nhóm này có thể sử dụng các phương pháp giải riêng có hiệu qủa hơn so với phương pháp giải chung, còn các véctơ thuộc nhóm thứ hai có dạng tổng quát. Ý tưởng của cách phân rã này là đưa bài toán với nhiều biến về bài toán ít biến hơn (gọi là bài toán chủ) nhưng với rất nhiều ràng buộc. Các ràng buộc này được tìm dần khi cần, nhờ giải các bài toán phụ. Sau đó nêu một ví dụ số để minh hoạ. Cuối chương nêu áp dung phân rã Benders vào qui hoạch tuyến tính có cấu trúc ma trận bậc thang.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS -TS Trần Vũ Thiệu - Viện toán học Việt Nam. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy. Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy Cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo Trường Đại Học Khoa Học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học toán K5C, K5A Trường Đại Học Khoa Học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luân văn này. Tôi xin cảm ơn tới UBND huyện Na Hang - PGD Đào tạo Na Hang -Tuyên Quang, Ban giám hiệu, các đồng nghiệp trường phổ thông Dân Tộc Bán Trú THCS Sinh Long - Na Hang -Tuyên Quang đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Do đây là lần đầu tiên thực hiện công việc nghiên cứu, nên trong luận văn không tránh khỏi những thiếu sót, em rất mong được sự đóng góp ý kiến của các Thầy Cô và các bạn để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, ngày 08 tháng 08 năm 2013
Người thực hiện

Vương Mạnh Cường

Chương 1
Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức cơ sở về tập lồi, tập lồi đa diện và định lý biểu diễn tập lồi đa diên qua các đỉnh và cạnh vô hạn của nó. Nêu các kiến thức cần thiết về bài toán qui hoạch tuyến tính và tính chất, bài toán đối ngẫu và các quan hệ đối ngẫu trong qui hoạch tuyến tính. Cuối chương đề cập tới thuật toán đơn hình cải biên giải qui hoạch tuyến tính. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [2], [3] và [4].

1.1. Tập lồi và tập lồi đa diện

Tập lồi là một khái niệm quan trọng được dùng rộng rãi trong tối ưu hoá. Tập lồi có nhiều tính chất đáng chú ý, đặc biệt là tập lồi đa diện.

Định nghĩa 1.1.1. Tập con C trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là một tập lồi nếu nó chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó. Nói cách khác, tập C là lồi nếu $\alpha a + (1-\alpha)b \in C$ với mọi a, b $\in C$ và mọi $0 \leq \alpha \leq 1$. Nói riêng, tập $\emptyset$, tập gồm duy nhất một phần tử và toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$ là các tập lồi

• Một số tập lồi đáng chú ý:

a,Tập afin, tức là tập chứa trọn đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ thuộc nó.

b, Siêu phẳng, tức là tập có dạng

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha, a \in \mathbb{R}^n \backslash \left\{0\right\}, \alpha \in R\right\}.$$

c, Các nửa không gian đóng

$$H^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \alpha\right\}, H^- = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \alpha\right\}.$$

d, Các nửa không gian mở

$$H^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x < \alpha\right\}, H^- = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x > \alpha\right\}.$$

e, Hình cầu đóng $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq r\}$ ($a \in \mathbb{R}^n$ $r > 0$ cho trước.)

• Từ định nghĩa tập lồi trực tiếp suy ra một số tính chất cơ bản sau đây:

a) Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là một tập lồi (nhưng hợp không đúng)

b) Tổng của hai tập lồi và hiệu của hai tập lồi cũng là các tập lồi.

c) Nếu $C \subset \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$ thì tích $C \times D = \{(x, y) : x \in C, y \in D\}$ là một tập lồi trong $\mathbb{R}^{m+n}$ (Có thể mở rộng cho nhiều tập lồi).

d) Tập M là một tập afin khi và chỉ khi $M = a + L$ với $a \in M$ và L là một không gian con, gọi là không gian con song song với M, hay tương đương: Mlà một tập afin khi và chỉ khi M là tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính, tức có biểu diễn $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m+n}, b \in \mathbb{R}^m\}$. Giao của bất kỳ các tập afin là tập afin.

Định nghĩa 1.1.2. a) Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng $x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k$với $a^i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1$, gọi là một tổ hợp lồi của các điểm $a^1, a^2, ..., a^k$.

b) Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng $x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k$ với $a^i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1$, gọi là một afin của các điểm $a^1, a^2, ..., a^k$.

c) Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng $x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k$với $a^i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0$, gọi là một tổ hơp tuyến tính không âm hay là tổ hợp nón của các điểm $a^1, a^2, ..., a^k$.

Định nghĩa 1.1.3. Cho E là một tập bất kỳ trong$\mathbb{R}^n$. , . . . ,

a) Giao của tất cả các tập afin chứa E gọi là bao afin của E, ký hiệu là aff E. Đó là tập afin nhỏ nhất chứa E.

b) Giao của tất cả các tập lồi chứa E gọi là bao lồi của E, ký hiệu là conv$E$. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa E.

Định nghĩa 1.1.4. a)Thứ nguyên (hay số chiều) của một tập afin M, ký hiệu dim$M$, là thứ nguyên (số chiều) của không gian con song song với nó. Qui ước $\dim \phi = -1$

b) Thứ nguyên (hay số chiều) của một tập lồi C, ký hiệu dim E, là thứ nguyên hay số chiều của bao afin aff C của nó. Một tập lồi C trong $\mathbb{R}^n$ gọi là có thứ nguyên đầy đủ nếu $dimC = n$

Tập lồi đa diện là một dạng tập lồi có cấu trúc đơn giản và rất hay gặp trong lý thuyết tối ưu tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.5. Một tập lồi mà là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng gọi là một tập lồi đa diện. Nói cách khác, đó là tập