ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
– – – – – – – – – – –

VÕ VĂN VIỆT

HÀM SINH
VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

–––––––––––

VÕ VĂN VIỆT

HÀM SINH VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Lời nói đầu

Hàm sinh là một công cụ mạnh trong việc giải một số bài toán tổ hợp. Hơn nữa, phương pháp hàm sinh cũng có nhiều ứng dụng trong các nghành khác của toán học. Mục đích của luận văn là trình bày một số kiến thức cơ bản phương pháp hàm sinh, chủ yếu thông qua một số vấn đề trong chương trình toán trung học phổ thông.

Luận văn chia làm hai chương, Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về phép đếm và các nguyên lý cơ bản của phép đếm. Nội dung chính của Chương 2 là những phương pháp hàm sinh và ứng dụng cơ bản của phương pháp hàm sinh khi giải một số lớp bài toán tổ hợp trong chương trình toán trung học phổ thông.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TSKH. **Hà Huy Khoái**. Tôi xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn.

Tôi xin được cảm ơn chân thành nhất tới Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, nơi Tôi đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản và xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp đã cảm thông, chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ trong xuốt thời gian Tôi học cao học và viết luận văn.

Lời cuối Tôi xin chúc sức khỏe các thầy cô giáo và đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 04 năm 2013

Người thực hiện

Võ Văn Việt

Chương 1

Kiến thức cơ sở

Trong chương này, trước tiên chúng ta giới thiệu một số phương pháp cơ bản thường dùng trong một lớp bài toán quan trọng của tổ hợp là bài toán đếm. Trong những phương pháp đó, phương pháp hàm sinh sẽ được giới thiệu chi tiết ở Chương 2.

1.1 Phép đếm. Các nguyên lý cơ bản của phép đếm

Định nghĩa 1.1.1. Tập hữu hạn, vô hạn

i) Một tập hợp A được gọi là hữu hạn và có n phần tử nếu tồn tại một song ánh giữa A và tập hợp con $\{1, 2, ..., n\}$ của $\mathbb{N}$. Ta viết $|A| = n$.

ii) Nếu A không hữu hạn, ta nói A vô hạn.

Bổ đề 1.1.2. *Nguyên lý bù trừ*

Giả sử B là một tập con của tập hợp hữu hạn A. Gọi $C_A(B)$ là phần bù của B trong A. Khi ấy ta có

$$|A| = |B| + |C_A(B)|.$$

Định lý 1.1.3. *Giả sử A, B là các tập hợp hữu hạn. Nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B và một đơn ánh từ B vào A thì A và B có cùng số phần tử.*

Nguyên lý cộng Nếu tập hợp hữu hạn C là hợp của n tập đôi một rời nhau $C_1, C_2, ..., C_n$ thì:

$$|C| = |C_1| + ... + |C_n|.$$

Định nghĩa 1.1.4. Tích Descartes của hai tập hợp A, B ký hiệu bởi AxB là tập hợp tất cả các cặp thứ tự (a, b) với $a \in A, b \in B$.

Nguyên lý nhân: Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì AxB cũng hữu hạn và ta có

$$|A.B| = |A|.|B|$$

Định nghĩa về tích Descartes và nguyên lý nhân trên đây có thể mở rộng cho nhiều tập hợp. Nguyên lý nhân có thể phát biểu một cách khác như sau:
Giả sử một quá trình có thể được thực hiện qua hai công đoạn: công đoạn I có n_1 cách thực hiện, công đoạn II (sau khi thực hiện I) có n_2 cách thực hiện. Khi đó có $n_1.n_2$ cách thực hiện quá trình đó.
Nguyên lý thêm bớt: Với hai tập hữu hạn A, B bất kỳ ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

1.2 Các đối tượng tổ hợp và các số tổ hợp

1.2.1 Họ các tập con của một tập hợp E

$$P(E) = \{A | A \subseteq E\}$$

Mệnh đề 1.2.1.

$$|P(E)| = 2^{|E|}$$

1.2.2 Chỉnh hợp của n phần tử chọn k

(hay chỉnh hợp chập k của n phần tử)
Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Chỉnh hợp của n phần tử chọn k là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i1}, ..., a_{ik})$.
Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k. Ta có

$$A_n^k = n(n-1)..(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.2.3 Tổ hợp của n phần tử chọn k

Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Tổ hợp của n phần tử chọn k là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử $\{a_{i1}, ..., a_{ik}\}$. Nói cách khác, đó là một tập con gồm k phần tử.
Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k. Ta có

$$C_n^k = \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.2.4 Hoán vị

Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Một hoán vị của E là một cách xếp các phần tử của E theo một thứ tự nào đó. Nói cách khác, đó chính là chỉnh hợp của n phần tử chọn n. Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n. Ta có $P_n = n!$.

1.2.5 Chỉnh hợp lặp

Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Chỉnh hợp lặp của n phần tử chọn k là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i1}, ..., a_{ik})$, trong đó cho phép lấy lặp lại. Số các chỉnh hợp chập k của n, theo quy tắc nhân, bằng n^k.

1.2.6 Tổ hợp lặp

Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Tổ hợp lặp của n phần tử chọn k là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử $\{a_{i1}, ..., a_{ik}\}$, trong đó cho phép lấy lặp lại. Nói cách khác, đó là một đa tập hợp gồm k phần tử lấy từ E (ta hiểu *đa tập hợp* là tập hợp mà trong đó mỗi phần tử có thể được kể nhiều lần).
Số các tổ hợp lặp chập k của n phần tử được ký hiệu là H_n^k. Ta có

$$H_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

1.2.7 Hoán vị lặp

Xét đa tập hợp $E(r_1, r_2, ..., r_s)$ có n phần tử, trong đó phần tử a_1 có r_1 phiên bản, phần tử a_2 có r_2 phiên bản, ..., phần tử a_s có r_s phiên bản. $r_1 + r_2 + ... + r_s = n$. Một cách xếp các phần tử của E theo thứ tự nào

đó được gọi là một hoán vị lặp của n phần tử của E.
Số hoán vị lặp của đa tập hợp $E(r_1, r_2, ..., r_s)$ bằng $\dfrac{n!}{r_1!...r_s!}$.

Bổ đề 1.2.2. *(Tính chất hệ số nhị thức)*

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k.$$

Định lý 1.2.3. *(Nhị thức Newton)*

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + ... + C_n^n y^n.$$

1.3 Các phương pháp đếm nâng cao

Cơ sở của phép đếm là định nghĩa phép đếm, các nguyên lý đếm và các số tổ hợp (là các số thường nảy sinh một cách tự nhiên trong các bài toán đếm). Tuy nhiên, với các công cụ cơ sở trên, chúng ta thường chỉ giải được những bài toán ở dạng đơn giản nhất. Với các bài toán có yêu cầu phức tạp hơn, cần đến các phương pháp đếm nâng cao.
Có nhiều phương pháp đếm nâng cao dựa trên các nền tảng lý thuyết khác nhau. Ví dụ phương pháp song ánh dựa vào lý thuyết tập hợp và ánh xạ, phương pháp thêm bớt cũng dựa vào lý thuyết tập hợp (cụ thể là tổng quát hóa của công thức $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$), phương pháp quỹ đạo dựa vào một định lý cơ bản về số đường đi ngắn nhất giữa hai điểm của lưới nguyên, phương pháp quan hệ đệ quy dựa vào ý tưởng quy nạp, phương pháp hàm sinh sử dụng các kiến thức tổng hợp của đại số và giải tích ...
Dưới đây, chúng ta sẽ giới thiệu sơ lược một số phương pháp đếm nâng cao.

1.3.1 Phương pháp quan hệ đệ quy.

Phương pháp quan hệ đệ quy là phương pháp giải bài toán với n đối tượng thông qua việc giải bài toán tương tự với số đối tương ít hơn bằng cách xây dựng các quan hệ nào đó, gọi là quan hệ đệ quy. Sử dụng quan hệ này, ta có thể tính được đại lượng cần tìm nếu chú ý rằng với n nhỏ, bài toán luôn có thể giải một cách dễ dàng.
Ta minh họa phương pháp này thông qua một số ví dụ:

Ví dụ 1.3.1. (Bài toán chia kẹo của Euler) Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \tag{1.1}$$

Giải. Gọi số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên là $S(n,k)$. Dễ dàng thấy rằng $S(1,k) = 1$. Để tính $S(n,k)$, ta chú ý rằng (1.1) tương đương với

$$x_1 + ... + x_{n-1} = k - x_n \tag{1.2}$$

Suy ra với x_n cố định thì số nghiệm của (1.2) là $S(n-1, k-x_n)$. Từ đó ta được công thức

$$S(n,k) = S(n-1,k) + S(n-1,k-1) + ... + S(n-1,0).$$

Đây có thể coi là công thức truy hồi tính $S(n,k)$. Tuy nhiên, công thức này chưa thật tiện lợi. Viết công thức trên cho $(n, k-1)$ ta được

$$S(n,k-1) = S(n-1,k-1) + S(n-1,k-2) + ... + S(n-1,0).$$

Từ đây, trừ các đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$S(n,k) - S(n,k-1) = S(n-1,k)$$

Hay

$$S(n,k) = S(n,k-1) + S(n-1,k).$$

Từ công thức này, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được rằng

$$S(n,k) = C^k_{n+k-1}.$$

Ví dụ 1.3.2. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n trong đó không có hai bit 1 đứng cạnh nhau?

Giải. Gọi c_n là số xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài. Ta có $c_1 = 2, c_2 = 3$. Để tìm công thức truy hồi, ta xây dựng xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài có dạng $a_n a_{n-1} a_{n-2}......a_2 a_1$. Có hai trường hợp

i) $a_n = 1$. Khi đó $a_{n-1} = 0$ và $a_{n-2}......a_2 a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài $n-2$ thỏa điều kiện. Có c_{n-2} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-2} xâu.

ii) $a_n = 1$. Khi đó $a_{n-1}......a_2a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài $n-1$ thỏa điều kiện. Có c_{n-1} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-1} xâu.

Vậy tổng cộng xây dựng được $c_{n-1} + c_{n-2}$ xâu, nghĩa là ta có hệ thức truy hồi

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

1.3.2 Phương pháp thêm bớt

Ta xét bài toán thực tế sau:

Ví dụ 1.3.3. Rút ngẫu nhiên 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Tính xác suất để trong 13 quân đó có "tứ quý".

Giải. Có C_{52}^{13} cách rút 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Ta cần tìm số cách rút trong đó có 4 quân bài giống nhau (về số!).
Trước hết ta đếm số cách rút có "tứ quý" A. Rõ ràng có C_{48}^{9} cách rút như vậy (lấy 4 con A và 9 con bất kỳ từ 48 con còn lại). Với các quân bài khác cũng vậy. Vì có 13 quân bài khác nên số cách rút là có tứ quý là 13. C_{48}^{9}.
Trong lời giải trên, chúng ta đã đếm lặp. Cụ thể là những cách rút bài có hai tứ quý, chẳng hạn tứ quý K và tứ quý A được đếm hai lần: một lần ở tứ quý A và một lần ở tứ quý K. Nhưng ta đang đếm không phải là số tứ quý mà là số lần gặp tứ quý. Như thế, những lần đếm lặp đó phải trừ đi. Dễ thấy, số cách rút có tứ quý K và A sẽ là C_{44}^{5}. Lý luận tiếp tục như thế, ta có con số chính xác cách rút có tứ quý là:

$$13.C_{48}^{9} - C_{13}^{2}.C_{44}^{5} + C_{13}^{3}C_{40}^{1}$$

và xác suất cần tìm bằng

$$P = (13.C_{48}^{9} - C_{13}^{2}C_{44}^{5} + C_{13}^{3}C_{40}^{1})/C_{52}^{13} = 0.0342.$$

Định lý 1.3.4. *Với n tập hợp $A_1, ..., A_n$ bất kỳ ta có công thức*

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cup A_j| + ... + (-1)^{n-1}|A_1 \cap ... \cap A_n|.$$

Ví dụ 1.3.5. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào?