ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

BÙI VĨNH AN

NGHIỆM SUY RỘNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPÈRE

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: **60.46.01.12**

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. HÀ TIẾN NGOẠN

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mở đầu

Phương trình Monge-Ampère elliptic là một phương trình đạo hàm riêng cổ điển. Nó thuộc lớp phương trình cấp hai phi tuyến hoàn toàn, song có nhiều ứng dụng trong lý thuyết và thực tế.

Nghiệm cổ điển của phương trình này thuộc lớp C^2, song nghiệm này không tồn tại khi vế phải được mở rộng. Người ta đã đưa vào lớp nghiệm suy rộng của phương trình trong đó nghiệm chỉ cần đòi hỏi là một hàm lồi và liên tục.

Luận văn trình bày về lớp nghiệm suy rộng này. Tài liệu chủ yếu dựa trên Chương I của tài liệu [1] Luận văn gồm hai chương.

Chương I trình bày khái niệm dưới vi phân của hàm lồi, từ đó xây dựng độ đo Borel sinh ra bởi hàm lồi, khái niệm nghiệm suy rộng của phương trình Monge-Ampère elliptic. Nghiệm suy rộng này chỉ cần là một hàm lồi liên tục mà độ đo Borel sinh ra bởi dưới vi phân của nó trùng với độ đo sinh ra bởi hàm số ở vế phải của phương trình. Chương này cũng trình bày các Nguyên lí cực đại và Nguyên lí so sánh đối với nghiệm suy rộng.

Chương II trình bày các định lý về tồn tại và duy nhất của nghiệm suy rộng đối với bài toán Dirichlet cho các trường hợp phương trình thuần nhất và phương trình không thuần nhất. Luận văn đã trình bày lớp nghiệm nhớt của phương trình này, đồng thời chứng minh rằng lớp nghiệm nhớt trùng với lớp nghiệm suy rộng được đưa vào xét trong chương I. Nghiệm nhớt của phương trình Monge-Ampère elliptic cũng được đòi hỏi là một hàm liên tục và cần phải thỏa mãn các bất phương trình tương ứng đối với các hàm thử là các hàm số bậc hai lồi chặt.

Chương 1

Một lớp nghiệm suy rộng của phương trình Monge-Ampère elliptic

1.1 Dưới vi phân của hàm lồi

Cho Ω là tập con mở của $\mathbb{R}^n$ và $u(x)$ là hàm số xác định trên Ω và nhận giá trị thực. Cho $x_0 \in \Omega$. Một siêu phẳng tựa của hàm u tại điểm $(x_0, u(x_0))$ là hàm afin $l(x) = u(x_0) + p.(x - x_0)$, sao cho $u(x) \geq l(x)$ với mọi $x \in \Omega$.

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Dưới vi phân của hàm u tại điểm $x_0 \in \Omega$ là tập hợp được định nghĩa bởi*

$$\partial u(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n; u(x) \geq u(x_0) + p.(x - x_0), \forall x \in \Omega\}.$$

Cho $E \subset \Omega$, ta định nghĩa $\partial u(E) = \cup_{x \in E} \partial u(x)$.

Tập $\partial u(x_0)$ có thể rỗng. Đặt $S = \{x \in \Omega : \partial u(x) \neq \emptyset\}$. Nếu $u \in C^1(\Omega)$ và $x_0 \in S$, thì $\partial u(x_0) = Du(x_0)$ là gradient của u tại x_0, nghĩa là nếu u khả vi tại x_0 thì dưới vi phân của nó chính là gradient $Du(x_0)$. Nếu $u \in C^2(\Omega)$ và $x \in S$ thì ma trận Hessian của u là xác định không âm, do đó $D^2u(x) \geq 0$. Điều này có nghĩa là nếu u là C^2, thì S là tập hợp mà trên đó đồ thị của u là lồi. Thật vậy, theo Định lý Taylor

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + Du.h + \frac{1}{2}\left\langle D^2u(\xi)h, h\right\rangle,$$

trong đó ξ nằm trong đoạn x_0 đến $x_0 + h$. Từ đó

$$u(x_0 + h) \geq u(x_0) + Du(x_0).h$$

với mọi h đủ bé, nên $Du(x_0) \in \partial u(x_0)$.

Ví dụ 1.1. Chúng ta sẽ tính toán dưới vi phân của hàm u có đồ thị là hình nón trong $\mathbb{R}^{n+1}$. Cho $\Omega = B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < \mathrm{R}\}$ trong $\mathbb{R}^n$, $h > 0$ và $u(x) = h\frac{|x-x_0|}{R}$. Đồ thị của u với $x \in \Omega$ là hình nón tròn xoay hướng lên trên trong $\mathbb{R}^{n+1}$. Ta có

$$\partial u(x) = \begin{cases} \frac{h}{R}\frac{x-x_0}{|x-x_0|}, 0 < |x - x_0| < R, \\ \\ \overline{B_{h/R}(0)}, x = x_0. \end{cases}$$

Thật vậy, nếu $0 < |x - x_0| < R$, thì giá trị của ∂u có được bằng cách tính gradient. Theo định nghĩa dưới vi phân, $p \in \partial u(x_0)$ nếu và chỉ nếu $\frac{h}{R}|x - x_0| \geq p.(x - x_0), \forall x \in B_R(x_0)$. Nếu $p \neq 0$ và ta chọn $x = x_0 + R\frac{p}{|p|}$, thì $|p| \leq \frac{h}{R}$. Rõ ràng là từ $|p| \leq \frac{h}{R}$ suy ra $p \in \partial u(x_0)$.

1.1.2 Các tính chất của dưới vi phân

Bổ đề 1.1. *Nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là mở, $u \in C(\Omega)$ và $K \subset \Omega$ là compact thì $\partial u(K)$ là compact.*

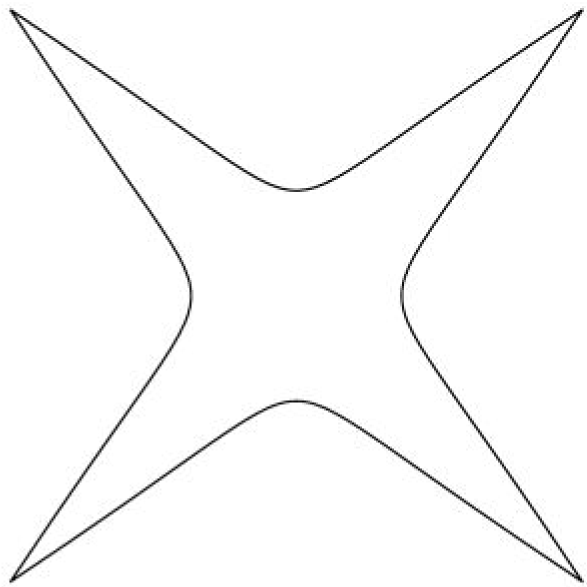
Chứng minh. Cho $\{p_k\} \subset \partial u(K)$ là một dãy. Ta khẳng định rằng p_k là bị chặn. Với mỗi k sẽ tồn tại $x_k \in K$ sao cho $p_k \in \partial u(x_k)$, đó là

$$u(x) \geq u(x_k) + p_k.(x - x_k), \forall x \in \Omega.$$

Do K là compact, $K_\delta = \{x : dist(x, K) \leq \delta\}$ là compact và chứa trong Ω với mọi δ đủ nhỏ, ta có thể giả thiết cho dãy con $x_k \to x_0$. Khi đó $x_k + \delta\omega \in K_\delta$ và $u(x_k + \delta\omega) \geq u(x_k) + \delta p_k.\omega$ với mọi $|\omega| = 1$ và với mọi k. Nếu $p_k \neq 0$ và $\omega = \frac{p_k}{|p_k|}$ thì ta được $\max_{K_\delta} u(x) \geq \min_K u(x) + \delta_{|p_k|}$ với mọi k. Do u là bị chặn địa phương, suy ra điều khẳng định được chứng minh. Do đó tồn tại $p_{k_m} \to p_0$. Ta khẳng định rằng $p_0 \in \partial u(x_0)$. Ta có $u(x) \geq u(x_{k_m}) + p_{k_m}.(x - x_{k_m})$ với mọi $x \in \Omega$ và do u liên tục, bằng cách cho $m \to \infty$ ta được $u(x) \geq u(x_0) + p_\circ.(x - x_0)$ với mọi $x \in \Omega$. Vậy ta dã chứng minh được Bổ đề. □

Chú ý 1.1. Chúng ta lưu ý là chứng minh ở trên cho thấy nếu u chỉ là bị chặn địa phương trong Ω, thì $\partial u(E)$ là bị chặn bất cứ khi nào E bị chặn với $\overline{E} \subset \Omega$.

Chú ý 1.2. Chúng ta lưu ý là với $x_0 \in \Omega$, tập hợp $\partial u(x_0)$ là lồi. Tuy nhiên, nếu K là lồi và $K \subset \Omega$ thì tập $\partial u(K)$ không nhất thiết là lồi. Một ví dụ là cho $u(x) = e^{|x|^2}$ và $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1, ..., n\}$. Tập $\partial u(K)$ là tập hợp đối xứng hình sao quanh gốc tọa độ là không lồi.
(xem Hình 1.1.)



Hình 1.1

Bổ đề 1.2. *Nếu u là hàm lồi trong Ω và $K \subset \Omega$ là compact, thì u là Lipschitz đều trong K, tức là tồn tại hằng số $C = C(u, k)$ sao cho $|u(x) - u(y)| \leq C\,|x - y|$ với mọi $x, y \in K$.*

Chứng minh. Từ u lồi, u có siêu phẳng tựa tại bất kỳ $x \in \Omega$. Cho $C = \sup\{|p| : p \in \partial u(K)\}$. Từ Bổ đề 1.1, $C < \infty$. Nếu $x \in K$ thì $u(y) \geq u(x) + p.(y - x)$ với $p \in \partial u(x)$ và với mọi $y \in \Omega$ trường hợp nếu $y \in K$, thì $u(y) - u(x) \geq -\,|p|\,|y - x|$. Bằng cách đảo ngược vai trò x, y ta suy ra được Bổ đề. $\square$

Bổ đề 1.3. ([3], trang 81) *Nếu Ω mở và u là liên tục Lipschitz trong Ω thì u là khả vi hầu khắp nơi trong Ω.*

Bổ đề 1.4. *Nếu u là lồi hoặc lõm trên Ω, thì u là khả vi hầu khắp nơi trên Ω.*

Chứng minh. Suy trực tiếp từ bổ đề 1.2 và 1.3. □

Chú ý 1.3. Kết quả sâu sắc hơn của Busemann-Feller-Aleksandrov khẳng định hàm lồi bất kỳ trong Ω có đạo hàm cấp 2 hầu khắp nơi.

Định nghĩa 1.2. *Biến đổi Legendre của hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm $u^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi*

$$u^*(p) = \sup_{x\in\Omega}(x.p - u(x))$$

Chú ý 1.4. Nếu Ω bị chặn và u bị chặn trong Ω, thì u^* là lồi trong $\mathbb{R}^n$.

Bổ đề 1.5. *Nếu Ω là mở và u là hàm liên tục trong Ω, thì tập hợp các điểm trong $\mathbb{R}^n$ thuộc ảnh tạo bởi dưới vi phân của hơn một điểm của Ω có độ đo Lebesgue bằng không. Vậy là, tập hợp*

$$S = \{p \in \mathbb{R}^n; x, y \in \Omega, x \neq y, p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}$$

có độ đo không. Điều này cũng nghĩa là tập hợp siêu phẳng tiếp xúc với đồ thị của u ở hơn một điểm có độ đo không.

Chứng minh. Chúng ta có thể cho rằng Ω là bị chặn, bởi vì nếu không thì ta viết $\Omega = \cup_k \Omega_k$, trong đó $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ là mở và $\overline{\Omega_k}$ là compact. Nếu $p \in S$, thì tồn tại $x, y \in \Omega, x \neq y$ và

$$u(z) \geq u(x) + p.(z - x), u(z) \geq u(y) + p.(z - y) \text{ với mọi } z \in \Omega.$$

Từ Ω_k tăng, $x, y \in \Omega_m$ với m nào đó và rõ ràng bất đẳng thức trước vẫn đúng với $z \in \Omega_m$. Như vậy, nếu

$$S_m = \{p \in \mathbb{R}^n : x, y \in \Omega, x \neq y \text{ và } p \in \partial(u\,|\Omega_m)(x) \cap \partial(u\,|\Omega_m)(y)\}$$

ta có $p \in S_m,$ tức là, $S \subset \cup_m S_m$ thì ta sẽ chứng minh rằng mỗi S_m có đọ đo không.

Cho u^* là biến đổi Legendre của u. Theo Chú ý 1.4 và Bổ đề 1.4, u^* là khả vi hầu khắp nơi. Cho $E = \{p : u^* \text{ là không khả vi tại } p\}$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng

$$\{p \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in \Omega, x \neq y, p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\} \subset E.$$

Thật vậy, nếu $p \in \partial u(x_1) \cap \partial u(x_2), x_1 \neq x_2$, thì $u^*(p) = x_i.p - u(x_i)$, $i = 1, 2$. Ta cũng có $u^*(z) \geq x_i.z - u(x_i)$ và $u^*(z) \geq u^*(p) + x_i.(z - p)$ với mọi $z, i = 1, 2$. Do đó nếu u^* khả vi tại p ta sẽ có $Du^*(p) = x_i$, $i = 1, 2$. như vậy Bổ đề đã được chứng minh. □

Định lý 1.1. *Nếu Ω là mở và $u \in C(\Omega)$, thì tập hợp*

$$S = \{E \subset \Omega : \partial u(E) \text{ là đo được}\}$$

là σ-đại số Borel.
Giả sử hàm $Mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ được định nghĩa bởi

$$Mu(E) = |\partial u(E)|, \tag{1.1}$$

trong đó $|\partial u(E)|$ là độ đo Lebesgue của tập $\partial u(E)$. Khi đó Mu là độ đo hữu hạn trên các compact, và được gọi là độ đo Monge-Ampère liên kết với hàm u.

Chứng minh. Từ Bổ đề 1.1, lớp S chứa toàn bộ các tập hợp con compact của Ω. Cũng vậy nếu E_m là dãy bất kỳ của tập con của Ω thì

$$\partial u(\cup_m E_m) = \cup_m \partial u(E_m).$$

Do đó, nếu $E_m \in S$, $m = 1, 2, \ldots$, thì $\cup_m E_m \in S$. Đặc biệt, ta có thể viết $\Omega = \cup_m K_m$ với K_m compact và có được $\Omega \in S$. Để chứng minh S là σ-đại số ta cần chứng minh rằng nếu $E \in S$, thì $\Omega \backslash E \in S$. Chúng ta dùng công thức sau có hiệu lực cho bất kỳ tập $E \subset \Omega$:

$$\partial u(\Omega \backslash E) = (\partial u(\Omega) \backslash \partial u(E)) \cup (\partial u(\Omega \backslash E) \cap \partial u(E)). \tag{1.2}$$

Từ Bổ đề 1.5, $|\partial u(\Omega \backslash E) \cap \partial u(E)| = 0$ cho tập hợp E bất kỳ. Từ (1.2) ta được $\Omega \backslash E \in S$ khi $E \in S$.
Giờ ta thấy rằng Mu là σ cộng tính. Cho $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ là dãy các tập rời nhau trong S và tập $\partial u(E_i) = H_i$. Chúng ta phải chứng minh

$$|\partial u(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|.$$

Do $\partial u(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \cup_{i=1}^{\infty} H_i$, sẽ cho ta thấy

$$|\cup_{i=1}^{\infty} H_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|. \tag{1.3}$$

Ta có $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$. Từ Bổ đề 1.5, $|H_i \cap H_j| = 0, i \neq j$. Ta viết $\cup_{i=1}^{\infty} H_i = H_1 \cup (H_2 \backslash H_1) \cup (H_3 \backslash (H_2 \cup H_1)) \cup (H_4 \backslash (H_3 \cup H_2 \cup H_1)) \cup ....$ Khi đó các tập ở bên phải là rời nhau. Bây giờ

$H_n = [H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)] \cup [H_n \backslash (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)]$.

Theo Bổ đề 1.5 $|H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)| = 0$ và ta được

$$|H_n| = |H_n \backslash (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)|.$$

Vì vậy theo (1.3), chứng minh định lý hoàn tất. □

Định lý 1.2. *Nếu $u \in C^2(\Omega)$ là hàm lồi, thì độ đo Monge-Ampère Mu liên kết với u thỏa mãn*

$$Mu(E) = \int_E \det D^2 u(x) dx \tag{1.4}$$

với mọi tập hợp Borel $E \subset \Omega$.

Chứng minh. Để chứng minh (1.4), chúng ta dùng kết quả của Định lý Sard 1.3 bên dưới.

Thứ nhất ta chú ý rằng từ u là lồi và thuộc $C^2(\Omega)$ thì Du là ánh xạ một-một trên tập $A = \{x \in \Omega : D^2\mathrm{u(x)} > 0\}$. Thực vậy, cho $x_1, x_2 \in A$ với $Du(x_1) = Du(x_2)$. Do tính lồi, $u(z) \geq u(x_i) + Du(x_i).(z - x_i)$ với mọi $z \in \Omega, i = 1, 2$. Từ đó $u(x_1) - u(x_2) = Du(x_1).(x_1 - x_2) = Du(x_2)(x_1 - x_2)$. Theo công thức Taylor ta có thể viết

$u(x_1) =$
$u(x_2) + Du(x_2)(x_1 - x_2) + \int_0^1 t \left\langle D^2 u(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2), x_1 - x_2 \right\rangle dt.$

Do đó tích phân là không và hàm lấy tích phân phải triệt tiêu với $0 \leq t \leq 1$. Từ $x_2 \in A$, kéo theo $x_2 + t(x_1 - x_2) \in A$ với t nhỏ. Do vậy $x_1 = x_2$. Nếu $u \in C^2(\Omega)$ thì $g = Du \in C^1(\Omega)$. Ta có $Mu(E) = |Du(E)|$ và

$$Du(E) = Du(E \cap S_0) \cup Du(E \backslash S_0).$$

Do $E \subset \mathbb{R}^n$ là tập Borel, $E \cap S_0$ và $E \backslash S_0$ cũng là tập Borel. Do đó, bằng công thức của đổi biến số và Định lý Sard,

$$Mu(E) = Mu(E \cap S_0) + Mu(E \backslash S_0) = \\ \int_{E \backslash S_0} \det D^2 u(x) dx = \int_E \det D^2 u(x) dx,$$

từ đó suy ra (1.4) □

Định lý 1.3. (Định lý Sard, [4]) *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở và $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ là C^1 trong Ω. Nếu $S_0 = \{x \in \Omega : \det g'(x) = 0\}$, thì $|g(S_0)| = 0$, trong đó $g'(x)$ là ma trận Jacobi của ánh xạ.*

Ví dụ 1.2. Nếu $u(x)$ là hình nón của Ví dụ 1.1, thì độ đo Monge-Ampère liên kết với u là $Mu = \left|B_{h/R}\right| \delta_{x_0}$, trong đó kí hiệu δ_{x_0} là hàm Dirac tại x_0, và $\left|B_{\frac{h}{R}}\right|$ là thể tích hình cầu trong $\mathbb{R}^n$ bán kính $\frac{h}{R}$.

1.2 Nghiệm suy rộng của phương trình Monge-Ampère elliptic

1.2.1 Khái niệm nghiệm suy rộng của phương trình Monge-Ampere elliptic

Định nghĩa 1.3. *Cho ν là một độ đo Borel xác định trên Ω, là tập con lồi mở trong $\mathbb{R}^n$. Hàm lồi $u \in C(\Omega)$ gọi là nghiệm suy rộng, hay là nghiệm Aleksandrov của phương trình Monge-Ampère*

$$\det D^2 u = \nu,$$

nếu độ đo Monge-Ampère Mu liên kết với u được định nghĩa trong (1.1) bằng độ đo ν.

1.2.2 Các tính chất

Mệnh đề dưới đây nói rằng khái niệm nghiệm suy rộng là đóng đối với giới hạn đều. Đó là, nếu u_k là nghiệm suy rộng của $\det D^2 u = \nu$ trong Ω và $u_k \to u$ đều trên tập con compact của Ω, thì u cũng là nghiệm suy rộng của $\det D^2 u = \nu$ trong Ω.