ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Nông Hương Na

ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀ CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mục lục **1**

Mở đầu **2**

1 Đa thức đại số và các đa thức đối xứng cơ bản **5**
1.1 Tính chất của đa thức đại số 5
1.2 Các tính chất của đa thức đối xứng cơ bản 6
1.2.1 Đa thức đối xứng nhiều biến 10
1.2.2 Đa thức đối xứng ba biến 12
1.2.3 Đa thức đối xứng hai biến 14
1.3 Một số dạng biểu diễn của đa thức đối xứng 18

2 Hệ phương trình đối xứng và hệ dạng đối xứng **20**
2.1 Hệ phương trình của đa thức đối xứng 20
2.1.1 Hệ phương trình n ẩn $(n > 3, n \in \mathbb{N})$ 20
2.1.2 Hệ phương trình ba ẩn 24
2.1.3 Hệ phương trình hai ẩn 28
2.2 Hệ phương trình đối xứng vòng quanh 30
2.3 Một số hệ bất phương trình đối xứng cơ bản 35

3 Bất đẳng thức liên quan đến đa thức đối xứng **37**
3.1 Bất đẳng thức của các dạng đa thức bậc hai 37
3.1.1 Tính chất 37
3.1.2 Bài tập áp dụng 38
3.2 Bất đẳng thức của các dạng đa thức bậc cao 42
3.3 Bất đẳng thức của các dạng phân thức 52
Kết luận 56
Tài liệu tham khảo 57

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài
1.1 Cơ sở lí luận:
Toán học là môn thể thao của trí tuệ, là môn khoa học giúp học sinh phát triển năng lực tư duy, khả năng dự đoán phân tích tổng hợp, phát hiện, tiếp thu, ghi nhớ khi trình bày một vấn đề một cách khoa học, lô gic, chặt chẽ.

1.2 Cơ sở thực tế:

Trong chương trình toán học ở trung học phổ thông thì đa thức có vai trò và vị trí rất quan trọng vì nó không những là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của Đại số mà còn là một công cụ đắc lực của giải tích trong Lý thuyết xấp xỉ, Lý thuyết nội suy, Lý thuyết biểu diễn... Trong các kỳ thi học sinh giỏi toán quốc gia, olympic toán khu vực và quốc tế thì các bài toán về đa thức cũng được xem như những dạng bài toán khó ở bậc trung học phổ thông. Trong lĩnh vực phức tạp của đại số đối với học sinh phổ thông thường là giải phương trình, hệ phương trình bậc cao, phân tích các đa thức nhiều biến bậc cao thành nhân tử, chứng minh các đẳng thức bất đẳng thức chứa nhiều biến số... Một trường hợp quan trọng và thường gặp trong các bài toán của các lĩnh vực nói trên là khi các biến số của đa thức có vai trò và vị trí như nhau. Chúng ta gọi đa thức trong trường hợp này là Đa thức đối xứng. Luận văn "*Đa thức đối xứng và các hệ phương trình đối xứng và bất đẳng thức liên quan*" trình bày một số vấn đề liên quan đến nhiều bài toán khó có chứa yếu tố đối xứng nếu biết áp dụng lý thuyết về đa thức đối xứng sẽ làm cho bài toán trở nên đơn giản hơn.

Luận văn nhằm giới thiệu cơ sở lý thuyết của các đa thức đối xứng và ứng dụng của nó trong đại số sơ cấp. Các vấn đề của lý thuyết được trình bày một cách đơn giản theo hướng quy nạp, từ trường hợp hai biến, ba biến, đến nhiều biến. Các ví dụ áp dụng cũng được trình bày từ đơn giản đến phức tạp. Các bài toán được trình bày trong luận văn chủ yếu là các bài toán khó, nhiều bài toán được trích ra từ các đề thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic toán quốc tế, IMO...

Đề tài quan tâm đến nhiều đối tượng, trong đó hoàn toàn phù hợp với thực tế mà bản thân đang công tác.

2. Mục đích nghiên cứu

Luận văn "*Đa thức đối xứng và các hệ phương trình đối xứng và bất đẳng thức liên quan*" nhằm thể hiện rõ vai trò quan trọng của đại số trong toán học. Luận văn này là chuyên đề tổng quan về đa thức đối xứng thông qua các định nghĩa, định lý, các ví dụ và bài tập áp dụng.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Tham khảo và nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu và các sách chuyên đề về đa thức, phương trình, hệ phương trình và các bài báo toán học viết về đa thức đối xứng, nhằm hệ thống các dạng toán về đa thức đối xứng.
Nghiên cứu trực tiếp từ các tài tài liệu của giáo viên hướng dẫn, của các đồng nghiệp cũng như các bạn học viên cao học trong lớp.

4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông, đề tài đóng góp thiết thực cho việc dạy và học đa thức đối xứng, phương trình, bất phương trình và bất đẳng thức trong trường phổ thông, đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

5. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương:
Chương 1: Đa thức đại số và các đa thức đối xứng cơ bản.
Chương 2: Hệ phương trình đối xứng và hệ dạng đối xứng.
Chương 3: Bất đẳng thức liên quan đến đa thức đối xứng.
Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót, em rất mong được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn để em tiếp tục hoàn thiện luận văn.
luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU. Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới Thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tiếp theo em xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện

đã đọc và góp ý để em hoàn thiện luận văn của mình, em xin được cảm ơn chân thành nhất đến khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản.Xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp đã cảm thông chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ trong thời gian em học cao học và viết luận văn. Lời cuối em xin chúc sức khỏe các thầy cô giáo và đồng nghiệp.
Em xin chân thành cảm ơn.

Chương 1

Đa thức đại số và các đa thức đối xứng cơ bản

1.1 Tính chất của đa thức đại số

Định nghĩa 1.1 (xem [1]-[4]). Một đa thức bậc n của ẩn x là biểu thức có dạng:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

trong đó, các hệ số a_n, a_{n-1}, $\ldots, a_0$ là những số thực (hoặc số phức) và $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta kí hiệu:

i) Bậc của đa thức $P_n(x)$ là $\deg P_n$. Do vậy $\deg P_n(x) = n$

ii) a_n là hệ số cao nhất (chính) của đa thức,

iii) a_0 là hệ số tự do của đa thức,

iv) $a_n x^n$ là hạng tử cao nhất.

Định nghĩa 1.2 (xem [1]-[3]). Cho đa thức

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ với } a_n \neq 0.$$

Khi đó, $\alpha \in \mathbb{C}$ được gọi là nghiệm của đa thức $P_n(x)$ nếu $P_n(\alpha) = 0$. Nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ sao cho $P_n(x) \vdots (x-\alpha)^k$ và $P_n(x) \not\vdots (x-\alpha)^{k+1}$ thì α được gọi là nghiệm bội k của đa thức $P_n(x)$.

Đặc biệt $k = 1$ thì α được gọi là nghiệm đơn, $k = 2$ thì α được gọi là nghiệm kép.

Định lý 1.1 (xem [1]-[3], Định lý Gauss). Mọi đa thức bậc $n \geq 1$ trên trường $\mathbb{C}$ đều có đúng n nghiệm nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng bội của nó.

Bổ đề 1.1. Các nghiệm phức thực sự của phương trình đa thức thực $P_n(z) = 0$ xuất hiện theo từng cặp nghiệm liên hợp.
Thật vậy, nếu $a \in \mathbb{C}$ là nghiệm của phương trình $P_n(z) = 0$ thì $P_n(a) = 0$. Khi đó, ta có:

$$0 = \overline{P_n(a)} = P_n(\overline{a}).$$

Định lý 1.2 (xem [1]-[3])**.** Mọi đa thức với hệ số thực đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{n_1}\ldots(x-\alpha_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots(x_s^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

trong đó,

$$\sum_{i=1}^{r} n_i + 2\sum_{i=1}^{s} m_i = n,\ p_i^2 - 4q_i < 0,\ i = \overline{1,s}$$

và

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r;\ p_1, q_1, \ldots p_s, q_s \in \mathbb{R}.$$

Từ định lý 1.2 ta có kết quả quan trọng sau đây.

Hệ quả 1.1. Giả sử $P_n(x)$ là đa thức bậc n có k nghiệm thực, $k \le n$ thì n và k cùng tính chẵn lẻ.

Định lý 1.3 (xem [1]-[4])**.** Mỗi đa thức bậc n đều có không quá n nghiệm thực.

1.2 Các tính chất của đa thức đối xứng cơ bản

Đa thức đối xứng là công cụ hữu hiệu để giải các phương trình đại số bậc cao, đặc biệt là phương trình hệ số đối xứng và phương trình hồi quy.

Định nghĩa 1.3 (xem [3])**.** Đa thức

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n\,(a_0 \neq 0)$$

được gọi là đa thức đối xứng, nếu các hệ số cách đều hai đầu bằng nhau, nghĩa là: $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \ldots$

Ví dụ 1.1. Các đa thức sau đây là đa thức hệ số đối xứng:

$$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 3z + 1,$$
$$2z^8 + z^7 - 6z^6 + 4z^5 + 3z^4 + 4z^3 - 6z^2 + z + 2.$$

Định lý 1.4. Đa thức $f(z)$ bậc n là đa thức đối xứng khi và chỉ khi

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z), \text{ với } z \neq 0.$$

Định nghĩa 1.4 (xem [3])**.** Phương trình

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,\ a_n \neq 0 \quad (1)$$

được gọi là phương trình đối xứng, nếu hệ số của những số hạng cách đều đầu và cuối bằng nhau, tức là $a_n = a_0; a_{n-1} = a_1; a_{n-2} = a_2; \ldots$
- Nếu $n = 2k + 1$, ta gọi (1) là phương trình đối xứng bậc lẻ.
- Nếu $n = 2k$ ta gọi (1) là phương trình đối xứng bậc chẵn.

Ta có các kết quả sau đây.

Mệnh đề 1.1 (xem [3])**.** Mọi phương trình đối xứng bậc lẻ đều nhận $x = -1$ làm một nghiệm.

Chú ý 1.1 (xem [3])**.** Từ định lý Bezout suy ra nếu $P(x) = 0$ là phương trình đối xứng bâc lẻ ($\deg P(x) = 2k + 1$) thì

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)Q(x) = 0,$$

ở đây $\deg Q(x) = 2k$, và $Q(x)$ là đa thức đối xứng bậc chẵn.

Mệnh đề 1.2 (xem [3])**.** Với phương trình đối xứng bậc chẵn bằng $2k$, bằng cách đặt $y = x + \dfrac{1}{x}$, phương trình quy về phương trình bậc k.

Ví dụ 1.2. Giải phương trình $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$.

Lời giải. Xét phương trình

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0. \quad (1)$$

Đây là phương trình đối xứng bậc chẵn. Rõ ràng $x = 0$ không phải là nghiệm của (1) nên

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x^2} + 2(x + \frac{1}{x}) - 6 = 0.\\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.\\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0. \ (2)\end{aligned}$$

Đặt $y = x + \dfrac{1}{x}$, khi đó (2) $\Leftrightarrow y^2 + 2y - 8 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ x + \dfrac{1}{x} = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 4x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \pm \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có ba nghiệm $x = 1$; $x = -2 + \sqrt{3}$; $x = -2 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 1.3. Giải phương trình

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0. \quad (1)$$

Lời giải.
Đây là phương trình đối xứng bậc lẻ, nên (1) chắc chắn có một nghiệm bằng -1. Theo lược đồ Hoocne, ta thấy

$$(x+1)\left(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Xét phương trình

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0. \quad (2)$$

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của (2) nên

$$(2) \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0. \quad (3)$$

Đặt $y = x + \dfrac{1}{x}$, và từ (3) ta có:

$$y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2. \\ y = 3. \end{array}\right.$$

a. Nếu $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

b. Nếu $x + \dfrac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là

$$x = 1; x = -1; x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 1.4. Cho phương trình đối xứng bậc chẵn sau đây:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0. \tag{1}$$

Chứng minh phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải.

Xét phương trình $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$. Do $x = 0$ không phải là nghiệm của (1), ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0. \tag{2}$$

Đặt $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Ta có:

$$|y| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{2}\right| \geq 2,$$

Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow y^2 + 2y + 2 = 0. (3)$$

Do $\Delta' = 1 - 2 = -1 < 0$. Vậy (3) vô nghiệm. Kéo theo (1) vô nghiệm. Suy ra đpcm.

Nhận xét 1.1. Ta có cách làm khác như sau:

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Leftrightarrow x^2\left(x^2 + 2x + 1\right) + \left(x^2 + 2x + 1\right) + 2x^2 = 0.\\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + 1\right)(x + 1)^2 + 2x^2 = 0.\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0. \ (4)\\ x = 0. \ (5)\end{cases}\end{aligned}$$

Vì (4),(5) vô nghiệm. Suy ra đpcm.

Ví dụ 1.5. Giả sử a, b là các số sao cho phương trình đối xững bậc chẵn $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm, tìm giá trị bé nhất của $a^2 + b^2$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.(1)$

(1) là phương trình đối xứng bậc chẵn. Theo giả thiết (1) có nghiệm, nên gọi $x_0 \neq 0$, là một nghiệm của (1). Rõ ràng từ (1) ta có

$$\begin{aligned}&\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right) + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b = 0\\ \Leftrightarrow &\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b - 2 = 0. \ (2)\end{aligned}$$