ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**Phạm Công Đỉnh**

# BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ TRONG TAM GIÁC

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

**Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
**Mã số: 60.46.0113**

**Người hướng dẫn khoa học**
**GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

**THÁI NGUYÊN - NĂM 2013**

# Lời cảm ơn

Luận văn "Bất đẳng thức đại số trong tam giác" được tác giả hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Để hoàn thành được luận văn này tác giả đã nhận được rất nhiều sự động viên, giúp đỡ của nhiều cá nhân và tập thể. Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu người thầy đã hướng dẫn tôi thực hiện luận văn của mình. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy cô giáo đã giảng dạy chúng tôi trong lớp cao học trong hai năm học vừa qua. Tôi xin gửi lời cám ơn chân thành tới các thầy cô trong Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Ban Chủ nhiệm khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và trường THPT Chu Văn An - Thái Nguyên đã tạo những điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập. Cuối cùng tôi xin gửi lời cám ơn đến gia đình, bạn bè, những người đã luôn bên tôi, động viên và khuyến khích tôi trong quá trình thực hiện luận văn của mình.

Tác giả

Phạm Công Đỉnh

# Mục lục

# Mở đầu

Bất đẳng thức trong tam giác là một phần quan trọng của toán sơ cấp. Bất đẳng thức đại số trong tam giác là một phần chiếm vị trí quan trọng trong các bài toán về bất đẳng thức trong tam giác. Có rất nhiều các dạng toán loại khó liên quan đến chuyên đề này.

Trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic toán quốc tế, các bài toán liên quan đến bất đẳng thức đại số trong tam giác cũng hay được đề cập và thường thuộc loại khó. Các bài toán về chứng minh bất đẳng thức, cực trị trong tam giác hay các bài toán về nhận dạng tam giác đã được đề cập ở các tài liệu bồi dưỡng giáo viên và học sinh chuyên toán bậc trung học phổ thông.

Các kết quả nghiên cứu về nội dung này tương đối đầy đủ và hoàn thiện. Chính vì vậy để thu được kết quả mới có ý nghĩa về nội dung này là rất khó. Tuy vậy cho đến những năm gần đây một số nhà toán học vẫn thu được một số kết quả mới có ý nghĩa về nội dung này.

Luận văn Bất đẳng thức đại số trong tam giác nhằm cung cấp một số kiến thức cơ bản về các hệ thức đại số của các yếu tố bên trong tam giác, bất đẳng thức liên quan đến số đo độ dài trong tam giác. Đồng thời cũng đưa ra được một số cách xây dựng các bất đẳng thức đại số mới trong tam giác.

Trong quá trình hoàn thành luận văn, tác giả đã không ngừng nỗ lực để học hỏi, tìm tòi và sưu tầm các bài toán về bất đẳng thức đại số trong tam giác.

Luận văn gồm phần mở đầu và ba chương.

Chương 1. Các đẳng thức đại số liên quan đến tam giác. Nội dung của chương này nhằm trình bày các định lí cơ bản về tam giác. Đồng thời trình bày các hệ thức đại số của các yếu tố bên trong tam giác.

Chương 2. Bất đẳng thức liên quan đến số đo độ dài trong tam giác.

Chương này nhằm giới thiệu một số bất đẳng thức đại số trong tam giác được xây dựng được từ các hệ thức đại số trong chương 1. Đồng thời đưa ra một số dạng hệ quả quen thuộc của bất đẳng thức AM-GM để chứng minh một số dạng bất đẳng thức đại số trong tam giác. Chương này cũng đưa ra một số bài thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế có liên quan đến bất đẳng thức đại số trong tam giác.

Chương 3. Một số ứng dụng vào bài toán cực trị và nhận dạng tam giác. Chương này đưa ra các bài toán về nhận dạng các loại tam giác: Tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

# Một số ký hiệu dùng trong luận văn

- MO - National Mathematical Olympiad.
- IMO - International Mathematical Olympiad.
- APMO - Asian Pacific Mathematical Olympiad.
- AM - GM - Arithmetic mean - Geometric mean.
- $\sum_{sym}$ - Tổng đối xứng, *sym* là viết tắt của *symmetric*.
- $\sum_{cyc}$ - Tổng hoán vị, *cyc* là viết tắt của *cyclic*.
- $m_a;\ m_b;\ m_c$ - lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh $A, B, C$.
- $l_a;\ l_b;\ l_c$ - lần lượt là độ dài các đường phân giác xuất phát từ các đỉnh $A, B, C$.
- $h_a;\ h_b;\ h_c$ - lần lượt là độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh $A, B, C$.
- $r$ : - là bán kính đường tròn nội tiếp.
- $R$ : - là bán kính đường tròn ngoại tiếp.
- $r_a;\ r_b;\ r_c$ - là bán kính đường tròn bàng tiếp.

- $p$ - là nửa chu vi của tam giác.
- $S$ - là diện tích của tam giác.

# Chương 1

# Các đẳng thức đại số liên quan đến tam giác

## 1.1 Các định lý cơ bản về tam giác

Trong luận văn này, ta sẽ sử dụng một số ký hiệu thống nhất trong tam giác như sau.

Cho tam giác $ABC$, ta kí hiệu $AB = c;\ AC = b;\ BC = a.$

**Định lý 1.1** (Định lý hàm số sin trong tam giác, xem [4],[6]). Trong tam giác $ABC$ luôn có đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

**Định lý 1.2** (Định lý hàm số cosin trong tam giác xem [4],[6]). Trong tam giác $ABC$ luôn có đẳng thức sau

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

**Định lý 1.3** (Định lý hàm số tang trong tam giác, xem [4],[6]). Trong tam giác $ABC$ luôn có đẳng thức sau

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}} = \tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2};$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}}=\tan\frac{B-C}{2}\tan\frac{A}{2};$$
$$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\dfrac{C-A}{2}}{\tan\dfrac{C+A}{2}}=\tan\frac{C-A}{2}\tan\frac{B}{2}.$$

**Định lý 1.4** (Công thức tính độ dài đường cao trong tam giác, xem [4],[6]).

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a};$$
$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b};$$
$$h_c=\frac{2S}{c}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

**Định lý 1.5** (Công thức tính độ dài đường trung tuyến trong tam giác, xem [4],[6]).

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4};$$
$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4};$$
$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

**Định lý 1.6** (Công thức tính độ dài đường phân giác trong tam giác, xem [4],[6]).

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\mathrm{A}}{2};$$
$$l_b=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\mathrm{B}}{2};$$
$$l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}.$$

**Định lý 1.7** (Công thức tính độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp, xem [4],[6]).

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

**Định lý 1.8** (Công thức tính độ dài bán kính đường tròn nội tiếp, xem [4],[6]).

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

**Định lý 1.9** (Công thức tính độ dài bán kính đường tròn bàng tiếp, xem [4],[6]).

$$r_a = p\tan\frac{A}{2} = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}};$$

$$r_b = p\tan\frac{B}{2} = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}};$$

$$r_c = p\tan\frac{C}{2} = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

**Định lý 1.10** (Công thức tính diện tích tam giác, xem [4],[6]).

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\text{casinB} = \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= pr = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{rr_ar_br_c} \\ &= p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 2R^2\sin A\sin B\sin C \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}. \end{aligned}$$

**Định lý 1.11** (Công thức hình chiếu, xem [4],[6]).

$$a = b\cos C + c\cos B = r(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2});$$

$$b = c\cos A + a\cos C = r(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2});$$