ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRƯƠNG THỊ HẢI YẾN

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Chuyên ngành : Giải tích
Mã số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS.TS TRƯƠNG XUÂN ĐỨC HÀ

Thái Nguyên - 2008

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Cho C là một tập con của không gian X , F là một ánh xạ từ C vào X . Phải đặt những điều kiện nào trên C, X và F để có thể khẳng định sự tồn tại của một điểm x_0 trong C sao cho $Fx_0 = x_0$? Điểm x_0 như vậy gọi là điểm bất động của ánh xạ F .

Lý thuyết điểm bất động là một nhánh của Toán học, có nhiều ứng dụng trong lí thuyết tối ưu, lí thuyết trò chơi, các bao hàm thức vi phân và trong nhiều nghiên cứu của Vật lí. Một số kết quả về tồn tại điểm bất động nổi tiếng đã xuất hiện từ đầu thế kỉ XX, trong đó phải kể đến nguyên lí điểm bất động Brouwer (1912) và nguyên lí ánh xạ co Banach (1922). Các kết quả kinh điển này đã được mở rộng ra các lớp ánh xạ và không gian khác nhau.

Mục đích của luận văn này là trình bày một cách chi tiết hơn một số định lí điểm bất động trong tài liệu *A.Granas, J.Dugundji. Fixed point Theory. Springer – Verlag. NewYork, 2003*. Chúng tôi chỉ hạn chế ở việc giới thiệu những kết quả dựa trên tính đầy đủ, tính sắp thứ tự của không gian và tính lồi.

Bố cục của luận văn gồm 4 chương với những nội dung chính sau đây:

Chương 1. Nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị làm cơ sở để theo dõi luận văn.

Chương 2. Nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động dựa trên tính đầy đủ của không gian như Nguyên lí ánh xạ co Banach, các mở rộng và ứng dụng của nó.

Chương 3. Trình bày sự tồn tại điểm bất động trong không gian có thứ tự như Định lí Knaster - Tarski, Định lí Tarski - Kantorovitch. Xét mối liên hệ giữa khái niệm thứ tự và tính đầy đủ ta thu được Định lí Bishop – Phelps, Định lí điểm bất động Carsti, Định lí Ekeland. Trong chương này còn trình bày điểm bất động của ánh xạ co đa trị, đồng thời xét một vài ứng dụng vào nghiên cứu hình học của không gian Banach, vào nghiên cứu điểm tới hạn.

Chương 4. Nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động dựa trên tính lồi cụ thể là dựa trên Nguyên lí ánh xạ KKM.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn tận tình của **PGS.TS Trương Xuân Đức Hà ,** tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và sự biết ơn sâu sắc đến cô. Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện đã đọc và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho luận văn của tác giả; các thầy cô giáo Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên; các thầy cô giáo ở Viện Toán học cùng toàn thể bạn bè đã đóng góp ý kiến, giúp đỡ, động viên tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn. Cuối cùng, tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, những người đã tạo điều kiện thuận lợi và động viên tác giả hoàn thành luận văn này.

Do thời gian và kinh nghiệm còn nhiều hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý từ thầy cô và các bạn. Tác giả xin chân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 9 năm 2008.

Học viên

Trương Thị Hải Yến

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này ta nhắc lại một số khái niệm và một số định lí quan trọng được dùng trong luận văn $([1],[2],[4],[5])$.

1.1. Tính compact và tính đầy đủ

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một không gian mêtric với mêtric *d*. Một dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,\, m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$, tức là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho với mọi $n, m > n_0$ ta có $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Định nghĩa 1.1.2. Không gian mêtric X gọi là *đầy đủ* (hay *đầy*) nếu mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ.

Ví dụ: $\mathbb{R}^n$ là không gian mêtric đầy đủ với khoảng cách Euclid.

Định nghĩa 1.1.3. Tập con A của không gian mêtric X được gọi là *tập compact* nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ trong A, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến một phần tử của A. Tập A gọi là *compact tương đối* nếu bao đóng $\overline{A}$ của A trong X là compact.

Ví dụ: Mọi tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ là tập compact.

Định nghĩa 1.1.4. Cho X và Y là hai không gian Banach. Toán t $T : D(T) \subseteq X \to Y$ được gọi là toán tử compact nếu T là liên tục và T biến một tập bị chặn thành một tập compact tương đối.

Định lí 1.1.5 (Nguyên lí Cantor). Trong không gian mêtric đầy đủ mọi dãy hình cầu đóng thắt dần đều có một điểm chung duy nhất. Ta nhắc lại, dãy hình cầu $\{B_n\}$ (với dãy bán kính tương ứng $\{r_n\}$) được gọi là thắt dần nếu $B_{n+1} \subseteq B_n$, với mọi $n \geq 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Định lí 1.1.6 (Định lí điểm bất động Schauder). Cho M là một tập không rỗng, lồi, đóng, bị chặn của không gian Banach X, và giả sử $T : M \to M$ là toán tử compact. Khi đó, T có một điểm bất động.

1.2. Tính bị chặn và tính liên tục của hàm số

Cho X là không gian mêtric. Giả sử $\varnothing \neq A \subset X$, $f : A \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in A$.

Định nghĩa 1.2.1. Hàm f *bị chặn dưới* trên A nếu tồn tại $h \in \mathbb{R} : f(x) \geq h$ với mọi $x \in A$. Hàm f *bị chặn trên* trên A nếu tồn tại $h \in \mathbb{R} : f(x) \leq h$ với mọi $x \in A$.

Định nghĩa 1.2.2. Hàm f là *nửa liên tục dưới* tại $x_0 \in A$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x_0) - f(x) < \varepsilon$ với mọi $x \in B(x_0, \delta)$, tức là $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$. Trong đó, $\liminf_{x \to x_0} f(x) = \inf \{u : \exists (x_n) \to x_0, f(x_n) \to u\}$. Nếu f là nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x \in A$ thì f được gọi là *nửa liên tục dưới* trên A. Hàm f được gọi là *nửa liên tục trên* trên A nếu hàm $-f$ là nửa liên tục dưới trên A.

1.3. Tập sắp thứ tự

Định nghĩa 1.3.1. Tập X cùng với quan hệ $\preceq$ thoả mãn

i) $x \preceq x$ với mọi $x \in X$ (tính phản xạ).

ii) $x \preceq y$, $y \preceq x$ kéo theo $x = y$ (tính phản đối xứng).

iii) $x \preceq y$, $y \preceq z$ kéo theo $x \preceq z$ (tính bắc cầu).

được gọi là *tập sắp thứ tự bộ phận* với quan hệ thứ tự "$\preceq$".

Định nghĩa 1.3.2. Tập con $A \subset X$ được gọi là *tập sắp thứ tự tuyến tính* (hay *xích*) nếu với $x, y \in A$ bất kì thì hoặc $x \preceq y$ hoặc $y \preceq x$.

Giả sử X là một tập sắp thứ tự với quan hệ thứ tự $\preceq$ và A là một tập con khác rỗng của X.

Định nghĩa 1.3.3. Một phần tử $a \in X$ gọi là *phần tử cực đại của* X nếu quan hệ $a^{\circ}\ x$ kéo theo $x = a$, với mọi $x \in X$. Một phần tử $a \in X$ gọi là *phần tử cực tiểu của* X nếu quan hệ $x^{\circ}\ a$ kéo theo $x = a$, với mọi $x \in X$.

Định nghĩa 1.3.4. Phần tử $a \in X$ gọi là *cận trên của tập* A nếu $x^{\circ}\ a$ với mọi $x \in A$.Nếu $a \in A$ và a là một cận trên của A thì a gọi là *phần tử lớn nhất của* A và kí hiệu là $\max A$. Phần tử $a \in X$ gọi là *cận dưới của tập* A nếu $a^{\circ}\ x$ với mọi $x \in A$. Nếu $a \in A$ và a là một cận dưới của A thì a gọi là *phần tử nhỏ nhất của* A và kí hiệu là $\min A$.

Định nghĩa 1.3.5. Phần tử $a \in X$ gọi là *supremum của* A (hay cận trên đúng của A) nếu nó là phần tử nhỏ nhất (nếu có) của tập hợp các cận trên của A, và kí hiệu là $\sup A$. Phần tử $a \in X$ gọi là *infimum* của A (hay cận dưới đúng của A) nếu nó là phần tử lớn nhất (nếu có) của tập hợp các cận dưới của A, và kí hiệu là $\inf A$.

Định nghĩa 1.3.6. Tập hợp A được gọi là *bị chặn trên* nếu nó có một cận trên. Tập hợp A được gọi là *bị chặn dưới* nếu nó có một cận dưới. Tập hợp A được gọi là *bị chặn* nếu nó bị chặn trên và bị chặn dưới.

Bổ đề 1.3.7 (Bổ đề Zorn). Giả sử $X \neq \varnothing$ là tập sắp thứ tự bộ phận. Nếu mọi xích của X đều có cận trên thì X có phần tử cực đại.

1.4. Không gian điểm bất động

Định nghĩa 1.4.1. *Cho* X *là một không gian tôpô* (*Hausdorff*) *và* f *là một ánh xạ liên tục của X, hoặc của một tập con của* X, *vào* X. *Một điểm* $x \in X$ *được gọi là một điểm bất động đối với* f *nếu* $x = f(x)$. *Tập tất cả các điểm bất động của* f *ký hiệu là* $Fix(f)$.

Người ta có thể thấy được trong định nghĩa này, dạng điển hình của các định lí về tồn tại trong giải tích. Ví dụ: tìm một nghiệm của phương trình $P(z) = 0$, trong đó P là một đa thức phức, tương đương với việc tìm một điểm bất động của ánh xạ $z \mapsto z - P(z)$. Tổng quát hơn, nếu D là toán tử bất kỳ trên một tập con của một không gian tuyến tính, việc chỉ ra phương trình $Du = 0$ (tương ứng $u \mapsto \lambda Du = 0$) có nghiệm tương đương với việc chỉ ra ánh xạ $u \mapsto u - Du$ (tương ứng $u \mapsto \lambda Du$) có một điểm bất động. Như vậy, những điều kiện lên một toán tử hay miền xác định ở định nghĩa để đảm bảo tồn tại một điểm bất động diễn giải như các định lí về tồn tại trong giải tích.

Cho một không gian X và ánh xạ liên tục $f : X \to X$. Sự tồn tại một điểm bất động đối với f có thể phụ thuộc hoàn toàn vào tính chất của không gian X, hơn là vào tính chất của ánh xạ f.

Định nghĩa 1.4.2. *Một không gian tôpô (Hausdorff) X được gọi là không gian điểm bất động nếu mọi ánh xạ liên tục $f : X \to X$ đều có một điểm bất động.*

Ví dụ 1.4.3.

(i) Một khoảng đóng bị chặn $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ bất kỳ là một không gian điểm bất động. Thật vậy, cho $f : J \to J$ ta có $a - f(a) \le 0$ và $b - f(b) \ge 0$, theo định lý giá trị trung bình phương trình $x - f(x) = 0$ có một nghiệm trong J, do đó f có một điểm bất động.

(ii) Tập số thực $\mathbb{R}$ không là không gian điểm bất động, vì ánh xạ $x \mapsto x + 1$ không có điểm bất động.

Trong trường hợp tổng quát, rất khó để kiểm định là một không gian có là không gian điểm bất động hay không, những kết quả thuộc loại đó thường có rất nhiều hệ quả tôpô quan trọng. Một ví dụ là định lí điểm bất động Brouwer chỉ ra rằng: *Mọi tập compact lồi trong $\mathbb{R}^n$ đều là không gian điểm bất động.*

Tính chất là không gian điểm bất động là một bất biến tôpô: nếu X là không gian điểm bất động và $h : X \to Y$ là đồng phôi thì với bất kì ánh xạ liên tục $g: Y \to Y$, ánh xạ $h^{-1} \circ g \circ h: X \to X$ có một điểm bất động x_0 nên $g \circ h(x_0) = h(x_0)$ và $h(x_0)$ là một điểm bất động đối với g.

Ví dụ 1.4.4. Đồ thị của hàm liên tục $f:\left[a,b\right] \to \mathbb{R}$, cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & khi \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & khi \quad x = 0 \end{cases}$$

là đồng phôi vào $\left[a,b\right]$, vì thế nó là một không gian điểm bất động.

Nếu X không là một không gian điểm bất động, vẫn có thể đúng rằng một số ánh xạ với các tính chất tốt sẽ có điểm bất động. Để hợp thức hoá khái niệm này, chúng ta mở rộng phát biểu của Định nghĩa 1.4.2:

Định nghĩa 1.4.5. *Cho X là một không gian tôpô (Hausdorff) và $\mathcal{M}$ là một lớp các ánh xạ liên tục $f: X \to X$. Nếu mọi $f \in \mathcal{M}$ có điểm bất động thì X được gọi là không gian điểm bất động tương ứng với $\mathcal{M}$.*

Chẳng hạn, nguyên lý ánh xạ co Banach khẳng định rằng: *Mọi không gian mêtric đầy đủ đều là không gian điểm bất động đối với các ánh xạ co.*

Khái niệm trên là đặc biệt quan trọng khi $\mathcal{M}$ là lớp các ánh xạ compact, nghĩa là những ánh xạ liên tục $f: X \to X$ với bao đóng $\overline{f(X)}$ của $f(X)$ là compact, các ánh xạ thuộc loại này xuất hiện một cách tự nhiên trong các vấn đề của giải tích phi tuyến.

Ví dụ 1.4.6.

(i) Ta đã biết $\mathbb{R}$ không là không gian điểm bất động. Trong thực tế, $\mathbb{R}$ là một không gian điểm bất động tương ứng với lớp ánh xạ compact. Nếu ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là compact thì $f(\mathbb{R})$ chứa trong đoạn hữu hạn $\left[a,b\right]$ nào đó; khi đó tự ánh xạ $f:\left[a,b\right] \to \left[a,b\right]$ có một điểm bất động.

(ii) Định lí điểm bất động Schauder có nhiều ứng dụng trong giải tích đã khẳng định rằng: *Mọi tập lồi trong không gian tuyến tính định chuẩn là không gian điểm bất động đối với các ánh xạ compact*.

Do ảnh liên tục của một tập compact là một tập compact, có thể sử dụng các kỹ thuật tương tự để chỉ ra rằng tính chất là không gian điểm bất động là một bất biến tôpô. Chẳng hạn, một tập mở bất kì $(a,b) \subset □$, cũng như đồ thị của $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$, là một không gian điểm bất động đối với các ánh xạ compact.

1.5. Tạo không gian điểm bất động mới từ không gian cũ

Nói chung, một không gian con của một không gian điểm bất động không nhất thiết là một không gian điểm bất động: chẳng hạn $\{a,b\} \subset [a,b]$ không có tính chất điểm bất động. Tuy nhiên, một số không gian con có thể thừa kế tính chất điểm bất động.

Định nghĩa 1.5.1. *Một tập con $A \subset X$ được gọi là tập co rút của X nếu có một ánh xạ liên tục $r : X \to A$ sao cho $r(a) = a$ với mỗi $a \in A$; ánh xạ r được gọi là ánh xạ co rút của X đến A.*

Ta lưu ý rằng một tập co rút của một không gian Hausdorff nhất thiết là một tập đóng, vì $A = \{x : r(x) = id(x)\}$, trong đó $id(.)$ là ánh xạ đồng nhất.

Chẳng hạn, nếu E là một không gian định chuẩn và $K_{\tilde{n}} = \{x \in E : \|x\| \le \tilde{n}\}$ là một hình cầu đóng trong E có tâm O và bán kính $\tilde{n}$, thì $r : E \to K_{\tilde{n}}$ được cho bởi

$$r(y) = \begin{cases} y & khi \quad \|y\| \le \tilde{n} \\ \tilde{n}\dfrac{y}{\|y\|} & khi \quad \|y\| > \tilde{n} \end{cases} \qquad (1.1)$$

là ánh xạ co rút chuẩn tắc từ E đến $K_{\tilde{n}}$.