ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Cao Xuân Nam

VẬN DỤNG THAM SỐ HÓA VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Cao Xuân Nam

VẬN DỤNG THAM SỐ HÓA VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ

Thái Nguyên - 2013

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ

Phản biện 1: GS.TSKH Hà Huy Khoái

Phản biện 2: TS Nguyễn Văn Minh

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên
Vào hồi 7 giờ 30 ngày 27 tháng 9 năm 2013

Có thể tìm hiểu luận văn tại trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên
Và thư viện Trường Đại học Khoa Học

Mục lục

Danh mục các kí hiệu

$\mathbb{N}$ được kí hiệu cho tập các số tự nhiên.

$\mathbb{N}^*$ được kí hiệu cho tập các số tự nhiên dương.

$\mathbb{Z}$ được kí hiệu cho vành các số nguyên.

$\mathbb{Q}$ được kí hiệu cho trường các số hữu tỉ.

$\mathbb{Q}^*$ được kí hiệu cho tập các số hữu tỉ dương.

$\mathbb{R}$ được kí hiệu cho trường các số thực.

$\mathbb{C}$ được kí hiệu cho trường các số phức.

K được kí hiệu cho một trong ba trường $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

K^* được kí hiệu cho trường mở rộng của K.

Mở đầu

Số học là một phân nhánh toán học lâu đời nhất và sơ cấp nhất, được hầu hết mọi người thường xuyên sử dụng từ những công việc thường nhật cho đến các tính toán khoa học. Số học giúp chúng ta có cái nhìn tổng quát, sâu rộng hơn, suy luận chặt chẽ và tư duy sáng tạo. Có thể thấy nhiều bài toán số học được phát biểu một cách đơn giản đến mức mà hầu hết học sinh phổ thông đều có thể hiểu được, nhưng lời giải của nó có thể làm đau đầu cả những nhà toán học xuất sắc. Để hiểu và giải được các bài toán số học phổ thông, thông thường chúng ta chỉ cần rất ít kiến thức toán học, nhưng lại cần nhiều đến khả năng tư duy, trí thông minh và một chút năng khiếu toán học.

Chính vì lẽ đó mà Số học là công cụ rất tốt để rèn luyện trí thông minh, tư duy toán học đồng thời là cơ sở để phát hiện ra các tài năng toán học. Số học đã trở thành một bộ phận quan trọng trong chương trình giảng dạy toán ở các lớp chọn và các lớp chuyên toán.

Trong Số học, các bài toán về phương trình nghiệm nguyên, ngoài phương trình bậc nhất hai ẩn thì hầu hết đều không có quy tắc giải tổng quát. Mỗi bài toán, với số liệu riêng của nó, đòi hỏi một cách giải riêng phù hợp. Điều đó có tác dụng rèn luyện tư duy toán học mềm dẻo, linh hoạt và sáng tạo. Chính vì thế mà các bài toán về Số học nói chung và phương trình nghiệm nguyên nói riêng thường xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh (thành phố), Quốc gia, Quốc tế và các đề thi tuyển sinh vào các lớp chọn, chuyên toán cũng vậy.

Mục đích chính của luận văn là nghiên cứu về đồ thị phẳng và ứng dụng của nó trong một số bài toán sơ cấp. Cụ thể tham số hóa một vài đồ thị phẳng, trên cơ sở đó đưa ra hệ thống các bài tập phương trình nghiệm nguyên có cùng phương pháp giải, đó là phương pháp tham số hóa. Ngoài ra luận văn còn đề cập một số dạng phương trình nghiệm nguyên khác. Ngoài phần Mở đầu, phần Kết luận, nội dung luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Trình bày khái niệm đồ thị phẳng, tham số hóa một vài đồ

thị phẳng, nêu Định lí Fermat và Định lí Wilson mà việc chứng minh hai định lí này qua biểu diễn đa thức, không sử dụng lí thuyết nhóm.
Chương 2. Trình bày một số dạng phương trình nghiệm nguyên như phương trình Diophantine tuyến tính; phương trình Pell; Phương trình Pythagore; phương trình Mordell và xây dựng phương trình nghiệm nguyên qua tham số hóa.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ - Đại học Sư phạm Hà Nội. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy. Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy Cô trong trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo trường Đại học Khoa Học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao Học Toán K5C trường Đại học Khoa Học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này. Tôi xin cảm ơn tới Sở Giáo dục - Đào tạo tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp trường THPT chuyên Hà Giang đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 08 năm 2013

Tác giả

Cao Xuân Nam

Chương 1
Tham số hóa một số đồ thị phẳng

1.1. Đa thức tối tiểu

Trong mục này K được kí hiệu là một trường con của trường mở rộng K^*, trong đó K^* có thể là $\mathbb{C}$ và K chứa các trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Ta gọi K là một *trường số*.

Định nghĩa 1.1. Giả sử K là một trường con của một trường K^*. Một phần tử $c \in K^*$ gọi là *đại số trên* K nếu c là nghiệm của một đa thức khác 0 lấy hệ tử trong K; c gọi là *siêu việt trên* K trong trường hợp trái lại.

Như vậy ta bảo c là đại số trên K có nghĩa là tồn tại những phần tử $a_i \in K$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ không bằng không tất cả, sao cho

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0.$$

Ví dụ 1.1. Trong trường số thực $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}$ là đại số trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}, \pi$ là siêu trên $\mathbb{Q}$.

Định lí 1.1. *Mỗi phần tử đại số c trên K đều là nghiệm của một đa thức bất khả quy duy nhất $f(x)$ thuộc vành $K[x]$ với hệ số cao nhất bằng 1. Hơn nữa, tất cả các đa thức $p(x) \in K[x]$ nhận c làm nghiệm đều phải chia hết cho $f(x)$.*

Chứng minh. Vì c là phần tử đại số trên K nên tồn tại đa thức $f(x) \in K[x]$ nhận c làm nghiệm. Trong số các đa thức nhận c làm nghiệm ta chọn đa thức $f(x)$ bậc thấp nhất với hệ tử cao nhất bằng 1. Nếu $f(x)$ là đa thức khả quy thì $f(x)$ phân tích được thành tích của hai đa thức $g(x)$ và $h(x)$ với bậc lớn hơn 0 và hệ tử cao nhất cũng bằng 1. Khi đó $f(x) = g(x)h(x)$ với $0 < degg, degh < degf$. Vì $f(c) = 0$ nên $g(c)h(c) = 0$. Vì K^* là một trường nên $g(c) = 0$, chẳng hạn. Như thế có đa thức $g(x)$ với $degg < degf$ nhận c làm nghiệm: mâu thuẫn với việc chọn của $f(x)$. Điều này chỉ ra $f(x)$ là bất khả quy. Tiếp theo, giả thiết $p(x) \in K[x]$ nhận c làm nghiệm. Nếu $p(x) = 0$ thì $p(x)$ chia hết cho $f(x)$. Nếu $p(x) \neq 0$ thì ta viết $p(x) = q(x)f(x) + r(x)$ với $q(x), r(x) \in K[x]$ và

$degr < degf$. Vì $f(c) = 0$ và $p(c) = 0$ nên $r(c) = 0$. Từ việc chọn $f(x)$ suy ra $r(x) = 0$ hay $p(x)$ chia hết cho $f(x)$. □

Hệ quả 1.2. *Trong vành $K[x]$, phần tử x là phần tử siêu việt trên K.*

Chứng minh. Ta coi $K[x]$ là một tập con của một trường K^* nào đó. Dễ dàng kiểm tra $x^0, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ là độc lập tuyến tính trên K. Nếu x là phần tử đại số trên K thì x là nghiệm của một đa thức $f(x) \in K[x], f(x) \neq 0, degf(x) = n > 0$. Từ đây suy ra $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ là phụ thuộc tuyến tính trên K: mâu thuẫn. □

Định nghĩa 1.2. Đa thức bất khả quy $f(x) \in K[x]$ với hệ số cao nhất bằng 1 nhận c làm nghiệm được gọi là *đa thức tối tiểu* của c trên K. các nghiệm $c_1, \ldots, c_n$ của đa thức tối tiểu của c được gọi là các *liên hợp* của c trên K.

1.2. Khái niệm đồ thị phẳng trong $\mathbb{R}^2$

Xét một đồ thị quen biết trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ cho bởi phương trình sau:

$$(\ell) : y^2 = x^2 + x^3.$$

Đây là một đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$. Để mô tả các điểm khác nữa trên đồ thị, ta thực hiện phép biến đổi bằng cách đặt $y = tx$ và thay nó vào phương trình đồ thị. Ta có $t^2x^2 = x^2 + x^3$. Khi $x = 0$ ta có điểm $O(0; 0)$. Khi $x \neq 0$ ta có điểm $(t^2 - 1; t(t^2 - 1))$. Điểm này sẽ trở thành điểm gốc tọa độ khi $t = 1$ hoặc $t = -1$. Vậy mọi điểm trên đồ thị (ℓ) có tọa độ $(t^2 - 1; t(t^2 - 1)), t \in \mathbb{R}$. Một điều làm ta phải chú ý đó là điểm $O(0; 0)$ sẽ tương ứng với hai giá trị khác nhau của t, còn những điểm khác chỉ tương ứng với một giá trị của t.

Định nghĩa 1.3. Giả sử đa thức $f = f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y], f \neq 0$. Kí hiệu $V(f)$ là tập tất cả các điểm $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $f(a, b) = 0$. Tập $V(f)$ được gọi là một *đồ thị phẳng* trong $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 1.2. Một vài đồ thị phẳng dưới đây:

(i) $(P) : y = x^2$.

(ii) $(\ell_1) : y^2 = x^3 - x$.

(iii) $(\ell_2) : y^2 = x^3 + x^2$.

(iv) $(\ell_3) : (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0.$

Định nghĩa 1.4. Đồ thị phẳng $V(f)$ được gọi là *đồ thị phẳng hữu tỉ* nếu có hai hàm hữu tỉ $\varphi(t), \psi(t) \in \mathbb{R}(t)$ của biến t và cả hai không đồng thời thuộc $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\varphi(t), \psi(t)) = 0$.

Đồ thị phẳng hữu tỉ có quan hệ tới việc tìm các nghiệm $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ của phương trình $f(x, y) = 0$ hoặc tìm các điểm thuộc đồ thị phẳng với tọa độ là những số hữu tỉ hay xác định những điểm không tầm thường với tọa độ nguyên thuộc đa tạp Fermat $V : x^n + y^n - z^n = 0, n \geqslant 3$.
Khi biểu diễn đồ thị phẳng $V(f)$ qua $x = \varphi(t), y = \psi(t) \in \mathbb{R}(t)$, ta nói rằng đã *tham số hóa* được $V(f)$. Việc tham số hóa đồ thị phẳng qua các hàm hữu tỉ như sau: Chọn điểm $P \in V$ và viết phương trình tham số của đường thẳng (d) qua P sao cho (d) cắt V tại đúng một điểm thứ hai khác P.

Cho $(\ell) : f(x, y) = 0$ với $f(x, y)$ là đa thức bất khả quy. Khi có hai hàm hữu tỉ $\varphi(t), \psi(t)$ của biến t và cả hai không đồng thời thuộc $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$ thì điểm $(\varphi(t), \psi(t))$ được gọi là *không điểm tổng quát* của (ℓ). Ta thêm ∞ vào $\mathbb{R}$ và coi nó như một phần tử. Ta định nghĩa $\varphi(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)$ và $\psi(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \psi(t)$. Khi đó tọa độ các điểm của (ℓ) với tọa độ thuộc $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sẽ có dạng $(\varphi(t); \psi(t)), t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Việc tìm không điểm tổng quát của (ℓ) gắn liền với vấn đề giải phương trình $f(x, y) = 0$ trên $\mathbb{Q}$ hay phương trình $z^d f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$ trên $\mathbb{Z}$, ở đó $d = \deg f(x, y)$.

Định nghĩa 1.5. Cho đồ thị phẳng bất khả quy (ℓ). Những điểm thuộc (ℓ) với tọa độ thuộc $\mathbb{Q}$ được gọi là *những điểm hữu tỉ* của (ℓ).

1.3. Tham số hóa đường cônic

Mệnh đề 1.3. *Đường thẳng* $d : ax + by + c = 0$ *được tham số hóa bởi*
$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
với $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Mệnh đề 1.4. *Đường tròn* $(C) : x^2 + y^2 = 1$ *là đồ thị phẳng hữu tỉ*