ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ QUỐC ĐẠI

MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ HÀM PHÂN CHIA CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

Thái Nguyên - Năm 2013

LỜI CAM ĐOAN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Tôi xin cam đoan các kết quả được trình bày trong luận văn là do tôi làm và không sao chép các luận văn đã được công bố trước đó.

Tác giả

Lê Quốc Đại

Mục lục

LỜI CẢM ƠN **3**

LỜI NÓI ĐẦU **5**

1 Phép phân chia số tự nhiên **6**

1.1 Khái niệm phép phân chia số tự nhiên 7

1.2 Phép phân chia có điều kiện 8

1.3 Hàm phân chia sao cho mỗi thành phần không quá m . . . 14

1.4 Hàm phân chia sao cho mỗi thành phần không nhỏ hơn m . 19

2 Hàm phân chia **22**

2.1 Tam giác Pascal 22

2.2 Một số công thức biểu diễn hàm phân chia 27

2.3 Sơ lược lịch sử 34

Kết luận **42**

Tài liệu tham khảo **43**

LỜI CẢM ƠN

Sau quá trình nhận đề tài và nghiên cứu dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn, luận văn "Một số kết quả về hàm phân chia các số tự nhiên" của tôi đã được hoàn thành. Có được kết quả này, đó là nhờ sự dạy bảo hết sức tận tình và nghiêm khắc của Cô. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô và gia đình!

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào Tạo - Khoa học - Quan hệ quốc tế và Khoa Toán - Tin của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi nhất trong suốt quá trình học tập tại trường cũng như thời gian tôi hoàn thành đề tài này. Sự giúp đỡ nhiệt tình và thái độ thân thiện của các cán bộ thuộc Phòng Đào tạo và Khoa Toán - Tin đã để lại trong lòng mỗi chúng tôi những ấn tượng hết sức tốt đẹp.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán K5C (Khóa 2011 - 2013) đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

LỜI NÓI ĐẦU

Một *phép phân chia* số tự nhiên n là một cách viết n thành tổng các số nguyên dương. Chú ý rằng mỗi phép phân chia số n có thể biểu diễn bằng nhiều cách (sai khác nhau thứ tự của các hạng tử, chẳng hạn $3 = 2 + 1$ và $3 = 1 + 2$ là 2 cách biểu diễn của một phép phân chia). Vì thế người ta thường viết mỗi phép phân chia dưới dạng một dãy $(p_1, \ldots, p_k)$ các số nguyên dương sao cho $p_1 \geq \ldots \geq p_k$ và $n = p_1 + \ldots + p_k$. Các số $p_1, \ldots, p_k$ được gọi là các *thành phần* của phép phân chia. Kí hiệu $P(n)$ là số cách chia của số tự nhiên n. Hàm $P(n)$ được gọi là *hàm phân chia.*

Khái niệm các phép phân chia số nguyên được nghiên cứu đầu tiên bởi nhà toán học lỗi lạc Leonhard Euler của Thế kỉ 18. Khái niệm này đã xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học, Vật lí. Một trong những kết quả bí ẩn và nổi tiếng trong lí thuyết phép phân chia số tự nhiên là các đồng nhất thức Roger-Ramanujan, đã được sử dụng và gắn kết với những chuyên nghành Tổ hợp, Lí thuyết số, Đa thức đối xứng, Nhóm đối xứng, Lí thuyết biểu diễn nhóm, Thống kê vật lí, Lí thuyết xác suất, Giải tích phức, . . .

Lí thuyết phép phân chia các số tự nhiên có một lịch sử lâu dài và ấn tượng. Từ Thế kỉ 18, Leonhard Euler là người đầu tiên đưa ra công thức truy hồi để tính $P(n)$. Hơn 150 năm sau đó, phương pháp của Euler mới được hoàn thiện để tính toán thành công số $P(n)$ với $n \leq 200$. Đến đầu Thế kỉ 20, Srinivasa Ramanujan và G. H. Hardy đã cho ra phương pháp xoay vòng "circle method" để tính $P(n)$, và có xấp xỉ đầu tiên tương đối tốt cho $P(n)$ với $n > 200$. Một câu hỏi rất khó kéo dài trong rất nhiều năm là đánh giá xấp xỉ giá trị của $P(n)$ khi n đủ lớn. Cho đến nay, câu hỏi này vẫn còn là vấn đề mở chưa được giải quyết, nhưng đã có một loạt câu trả lời bộ phận được đưa ra bởi Hardy-Ramanujan [HR] năm 1918, bởi Hans Rademacher [R] năm 1943, . . . Đặc biệt, năm 2007, Kathrin Bringmann và Ken Ono [BO] đã đưa ra một cải tiến vượt bậc cho công thức của Rademacher.

Từ các đồng dư thức nổi tiếng về $P(n)$ phát hiện bởi Ramanujan năm 1921, người ta tiếp tục quan tâm đến tính chất đồng dư thức của $P(n)$. Năm 1960, M. Newman đã giả thuyết rằng với mỗi cặp số tự nhiên m, r, tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $P(n) \equiv r \pmod{m}$. Giả thuyết này đã được hàng trăm nhà toán học quan tâm nhưng vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn. Kết quả tốt nhất trả lời bộ phận cho giả thuyết này thuộc về Ken Ono [O1] trong bài báo trên tạp chí Ann. Math. năm 2000 và S. Ahlgren và M. Boylan [AB] trong bài báo trên Invent. Math. năm 2003.

Mục đích của luận văn này là trình bày khái niệm và một số kết quả cơ bản về phép phân chia các số tự nhiên. Các kiến thức viết trong luận văn chủ yếu tham khảo trong 3 tài liệu sau đây:

1. S. Ahlgren and M. Boylan, *Arithmetic properties of the partition function*, Invent. Marth.,**153** (2003) 487 - 502.

2. G. E. Andrew and K. Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge University Press, 2004.

3. H. Torabi, J. Behboodian, S. Mirhosseini, *On the number of paratitions of sets and natural numbers*, Apps. Math. Sci., **33** (2009) 1635 - 1646.

Luận văn gồm 2 chương. Chương 1 dành để trình bày khái niệm và tính chất cơ bản của phép phân chia các số tự nhiên, phép phân chia có điều kiện và đặc biệt quan tâm đến 2 dạng phép phân chia có điều kiện: phép phân chia với các thành phần không nhỏ hơn m và phép phân chia với các thành phần không lớn hơn m. Chương 2 trình bày một số kết quả về hàm phân chia $P(n)$, trong đó có sơ đồ tam giác Pascal để tính giá trị P(n) (Định lí 2.2.1, Định lí 2.2.4). Phần cuối chương tóm tắt lịch sử Lí thuyết phép phân chia các số tự nhiên.

Chương 1

Phép phân chia số tự nhiên

Phép phân chia một số nguyên được nghiên cứu đầu tiên bởi Leonhard Euler (15/4/1707 - 18/9/1783). Ông là nhà vật lí học người Thụy Sĩ. Ông cùng với Archimedes và Newton được xem là những nhà toán học thiên tài nhất mọi thời đại, ông cũng được xem là nhà toán học quan trong nhất của Thế kỉ 18. Ông là người đầu tiên sử dụng thuật ngữ "hàm số" để miêu tả một biểu thức có chứa các đối số như $y = f(x)$. Ông cũng được xem là người đầu tiên dùng phép tính vi tích phân trong Vật lí. Ông được sinh ra và lớn lên ở thành phố Basel, Thụy Sĩ và được xem là thần đồng toán học từ nhỏ. Ông là giáo sư toán học tại Saint-petersburg, sau đó là Berlin, rồi lại chuyển về Saint-petersburg.

Lí thuyết phép phân chia các số tự nhiên đã được xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học, Vật lí học. Một trong những kết quả bí ẩn và lừng danh trong lí thuyết phép phân chia số tự nhiên là các đồng nhất thức Roger-Ramanujan được khám phá một cách độc lập bởi Roger, Schur và Ramanujan và được xuất bản trong cuốn sách G. H. Hardy [Har] năm 1940. Các đồng nhất thức Roger-Ramanujan có nhiều ứng dụng và gắn kết mật thiết với những chuyên nghành khác nhau của Toán học như Tổ hợp, Lí thuyết số, Đa thức đối xứng, Nhóm đối xứng, Lí thuyết biểu diễn nhóm, Thống kê vật lí, Lí thuyết xác suất, Giải tích phức, . . .

Trong suốt chương này, luôn giả thiết n là một số nguyên dương. Mục đích của Chương là giới thiệu khái niệm phép phân chia số tự nhiên, phép phân chia có điều kiện và một vài dạng đặc biệt như phép phân chia có đúng i thành phần bằng 1, phép phân chia mà mỗi thành phần đều không nhỏ hơn một số m cho trước, . . .

1.1 Khái niệm phép phân chia số tự nhiên

1.1.1. Định nghĩa. Một *phép phân chia số tự nhiên* n là một cách viết n thành tổng của các số nguyên dương.

Chú ý rằng một phép phân chia có thể biểu diễn thành nhiều dạng. Chẳng hạn, $4 = 3 + 1$ và $4 = 1 + 3$ là hai dạng biểu diễn của cùng một phép phân chia số 4 thành hai thành phần 3 và 1. Như vậy, hai dạng biểu diễn của n thành tổng các số nguyên dương được xem là của cùng một phép phân chia nếu chúng chỉ khác nhau về thứ tự các số hạng. Cụ thể, hai dạng biểu diễn $n = a_1 + \ldots + a_r$ và $n = b_1 + \ldots + b_s$, trong đó $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ là các số nguyên dương, được coi là của cùng một phép phân chia nếu $r = s$ và tồn tại một hoán vị σ của tập $\{1, 2, ..., r\}$ sao cho $a_i = b_{\sigma(i)}$ với mọi $i = 1, \ldots, r$.

1.1.2. Ví dụ. Có 5 phép phân chia số 4 sau đây, đó là:

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ &= 3 + 1 \\ &= 2 + 2 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

1.1.3. Chú ý. Rõ ràng mỗi phép phân chia số n có duy nhất một dạng biểu diễn chuẩn, tức là biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương xếp theo thứ tự từ lớn đến bé. Vì thế ta có thể coi một phép phân chia số n là một bộ $(p_1, \ldots, p_k)$ các số nguyên dương thỏa mãn $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k$ và tổng của chúng là n. Với kí hiệu như vậy, thay cho cách viết có 5 phép phân chia của số 4 là:

$$4 = 4,\ 4 = 3 + 1,\ 4 = 2 + 2,\ 4 = 2 + 1 + 1,\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Ta có thể viết lại phép phân chia này như sau

$$(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1).$$

1.1.4. Định nghĩa. Số phép phân chia của n được kí hiệu là $P(n)$. Hàm $P(n)$ được gọi là *hàm phân chia.* Cho thuận lợi, ta quy ước $P(n) = 0$ với mọi $n < 0$ và $P(0) = 1$.

1.1.5. Ví dụ. Có 7 phép phân chia số 5 sau đây, đó là

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Vậy $P(5) = 7$.

1.1.6. Kí hiệu. Mỗi phép phân chia của n có duy nhất một dạng *tiêu chuẩn* $(p_1, \dots, p_k)$, trong đó $(p_1, \dots, p_k)$ là bộ k số nguyên dương xếp theo thứ tự từ lớn đến bé và tổng của chúng bằng n. Mỗi p_i trong phép phân chia $(p_1, \dots, p_k)$ được gọi là một *phần* hay một *thành phần* của phép phân chia đó.

1.1.7. Ví dụ. Ta có $P(6) = 11$ vì có đúng 11 phép phân chia số 6, đó là:

$$(6), (5, 1), (4, 2), (4, 1, 1), (3, 3), (3, 2, 1),$$
$$(3, 1, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

1.2 Phép phân chia có điều kiện

Ta hiểu một *phép phân chia có điều kiện* của số n là một phép phân chia số n với một điều kiện nào đó trên các thành phần của phép phân chia. Dưới đây là một số bài toán thường gặp về phép phân chia có điều kiện.

(i) Tìm số phép phân chia n sao cho mỗi thành phần đều là số lẻ.

(ii) Tìm số phép phân chia n sao cho mỗi thành phần đều là số chẵn.

(iii) Tìm số phép phân chia n sao cho mỗi thành phần là đôi một khác nhau.

(iv) Tìm số phép phân chia n sao cho các thành phần lặp lại quá m lần.

(v) Tìm số phép phân chia n sao cho không có thành phần vượt quá m.

(vi) Tìm số phép phân chia n sao cho mỗi thành phần đều không nhỏ hơn m.

(vii) Tìm số phép phân chia n sao cho mỗi phép chia có đúng m thành phần.

(viii) Tìm số phép phân chia n sao cho có đúng m thành phần bằng 1.

(ix) Tìm số phép phân chia n sao cho không có quá m thành phần.

(x) Tìm số phép phân chia n sao cho nó có một số chẵn hạng tử và các hạng tử là đôi một khác nhau.

(xi) Tìm số phép phân chia n sao cho nó có một số lẻ hạng tử và các hạng tử là đôi một khác nhau.

1.2.1. Ví dụ. Ta có $P(8) = 22$ vì có đúng 22 phép phân chia số 8, đó là:

$$(8), (7,1), (6,2), (6,1,1), (5,3), (5,2,1), (5,1,1,1), (4,4), (4,3,1), (4,2,2),$$

$$(4,2,1,1), (4,1,1,1,1), (3,3,2), (3,3,1,1), (3,2,2,1), (3,2,1,1,1),$$

$$(3,1,1,1,1,1), (2,2,2,2), (2,2,2,1,1), (2,2,1,1,1,1),$$

$$(2,1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,1,1).$$

(i) Có 6 phép phân chia của 8 sao cho các thành phần đều lẻ, đó là:

$$(7,1), (5,3), (5,1,1,1), (3,3,1,1), (3,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,1,1).$$

(ii) Cũng có đúng 6 phép phân chia của 8 sao cho không có thành phần nào bị lặp lại, đó là:

$$(8), (7,1), (6,2), (5,3), (5,2,1), (4,3,1).$$